<u>基础数学讲义之二</u>

《基础几何学之一》

定性与定量平面几何，立体几何基础论

项武义

香港科技大学数学系

目录

引言——空间的基本概念与基本结构

几何学乃是人类理性文明，对于我们和大自然中的万物万象共存于其中的空间的「认识论」。宇宙中的所有事物皆存在于其中、发生于其内，当然也永远受著空间本质的制约与蕴育。几何学的课题也就是去研究、理解空间的本质，它是我们研讨大自然、理解大自然的自然起点和基石所在；它也是整个自然科学的启蒙者和奠基者，是理所当然的第一科学。不论在自然科学的发展顺序上，或在全局的基本重要性上，几何学都是当之无愧的先行者与奠基者，也是种种科学思想和方法论的自然发祥地。它源远流长，历经数千年世代相承精益求精的研究和逐步逐阶的进展，至今依然根深干粗，蓬勃拙壮。在现今廿一世纪，它会继续是开拓新知的有力工具，而自然科学的拓展又必然对于空间几何学的理解深度和广度提出新的要求和问题。总之自然科学和几何学的进展是密切相关、相辅相成的。伽利略 (Galileo) 曾说：「上帝必定是一个几何学家 (God must be a geometer)。」其所指也许就是上述自然科学和几何学之间的自然结合。

自古到今，几何学的研究在方法论上大体可以划分成下述几个阶段：

(1) 实验几何：用归纳实验去发现空间之本质。

(2) 推理几何：以实验几何之所得为基础，改用演译法，以逻辑推理去探索新知，并对于已知的各种各样空间本质，精益求精地作系统化和深刻的分析。在这方面，古希腊文明获得了辉煌的成就，它也是全人类理性文明中的重大篇章。

(3) 坐标解析几何：笛卡儿 (Descartes) 和费玛 (Fermat) 通过坐标系的建立，把当代数学中的两大主角——几何学和代数学——简明有力

地结合起来，开创了近代数学的先河。其自然而然的结果是微积分的产生和大量地运用解析法研讨自然现象。

(4) 向量几何：从现代的观点来看，空间最为根本而且控制全局的本质乃是由它的所有保长变换所构成的变换群 (transformation group)，通常又称之为 3–维的欧氏群 (Euclidean group of $\mathbb{E}^3$)，而几何学所研究者就是这个变换群的不变量理论 (invariant theory)。因为所有几何量都根源于长度，所以必然在保长变换之下保持不变；反之，任何在保长变换群的作用之下保持不变的（亦即不变量—invariants）也都具有几何意义，而且也一定根源于长度。向量几何在本质上乃是坐标解析几何的返璞归真，它的最大优越性在于向量运算的正交不变性 (orthogonal invariance)。可以说，向量几何乃是不依赖于坐标系的解析几何 (coordinate-free analytical geometry)，它自然而然地化解了原先在坐标解析几何中，由坐标系的选取所引入的各种各样（非几何的）非不变量的困扰！ Hamilton 和 Grassmann 分别是 3–维和高维的向量代数的创始者。

0.1 基本概念和基本结构

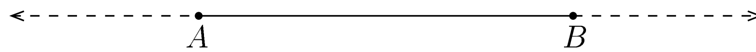
位置 (location) 是空间的基本概念之中最为原始者。空间本身其实就是宇宙之中所有可能的位置的总体。在几何学的讨论中，通常用点 (point) 来标记位置， 所以点其实就是位置的抽象化 (abstraction)。当一个动点 (moving point) 由一个位置移动到另一位置，其所经过的点组成这个运动的通路 (path)。连结于空间各地之间的通路则是空间基本概念中第二个最原始者。再者，光线的普遍存在和我们的视觉很自然地启示我们，并促使我们认识到空间的基本结构乃是：

> 「连结给定两点之间的所有通路之中，有一条唯一的最短通路——它就是连结两点的直线段。」

这也就是在我们日常生活的大气层内，或者在太空中，光由一点射向另一点所经过的通路，亦即我们常见的光线 (light rays)。再者，我们日常的经验是：若不受阻碍，光线是会一直向前无限延伸的。射线 (ray) 这个基本几何概念就是上述这种可以无限向前延伸的光线的抽象化，

而空间中给定相异两点 $\{A,B\}$ 所确定的直线则是由 A 射向 B 的射线和由 B 射向 A 的射线的和集 (union)。总结上述的讨论，空间的基本结构可以描述如下：

【基本几何结构】：对于空间给定相异两点 $\{A,B\}$ 存在有唯一连结于 A, B 之间的最短通路，称之为连结 A,B 的直线段 (interval)，将以符号 $\overline{AB}$ 表示之。再者由 A 到 B 的最短通路可以向前无限延伸，称之为由 A 射向 B 的射线，将以符号 $\overrightarrow{AB}$ 表示之。而该线段向两端无限延伸的通路，亦即 $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$，则称之为由 $\{A,B\}$ 所唯一确定的直线 (straight line)，将以符号 AB 表示之。



[图 0–1]

[注]：点是最为原始的几何事物 (geometric object)，所有其他的几何事物都是由点组合而成的。直线段和直线则是第二种最为原始的几何事物，所有其他的几何结构和性质都是由它们所表达的基本结构来刻划和表述的。

直线和直线段之间，显然有下述基本关系：

<u>直线上的次序与分隔</u>：

(i) $\overline{AB}$ 是 AB 的一个子集。若 $C \in \overline{AB}$ 而且 $C \neq A$ 或 B，则称 C 位于 A, B 之间。再者，若 $C, D \in \overline{AB}$ 则 $\overline{CD} \subseteq \overline{AB}$。

(ii) 直线 ℓ 上任给一点 P 把直线 ℓ 分割成两段， 称为 P 的两侧。属于同侧的两点 A_1, A_2 其直线段 $\overline{A_1A_2}$ 不包含 P；而属于异侧的两点 A, B 其直线段 $\overline{AB}$ 则包含 P。

设 $\{A,B,C\}$ 是 $\ell \setminus \{P\}$ 中的相异三点，而且 $P \in \overline{AB}$，则 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 中有一且仅有一包含 P。再者，由相异两点定一直线段（或一直线）这两种密切相关的空间基本结构，就可以自然地定义下述两种和两者各别相容的子集。

【定义】：空间中的子集 $\mathcal{S}$ 若满足性质：

$$\text{若 } A, B \in \mathcal{S},\ A \neq B \quad \text{则} \quad \overline{AB} \subset \mathcal{S}$$

则称 $\mathcal{S}$ 为一个凸子集 (convex subset)。

【定义】：空间中的子集 $\mathcal{S}$ 若满足性质：

$$\text{若 } A, B \in \mathcal{S},\ A \neq B \quad \text{则} \quad AB \subset \mathcal{S}$$

则称 $\mathcal{S}$ 为一个平直子集 (straight or rectilinear subset)。

显然，所有平直子集也都是凸子集。但是，反之则不然。例如直线段 $\overline{AB}$ 是一个凸子集，但是它并非平直子集，而直线 AB 本身则当然是一个平直子集和凸子集。

再者，由上述定义，易见凸子集的交集 (intersection) 还是凸子集，平直子集的交集还是平直子集。由此可见，对于空间给定的点集 $\mathcal{S}$，在所有包含 $\mathcal{S}$ 的凸子集之中有一个唯一的最小者，它其实就是所有包含 $\mathcal{S}$ 的凸子集的交集是也，通常叫做 $\mathcal{S}$ 的凸包 (convex hull of $\mathcal{S}$)，我们将以 $C(\mathcal{S})$ 表示之。同样地，所有包含 $\mathcal{S}$ 的平直子集的交集乃是那个包含 $\mathcal{S}$ 的平直子集中的最小者，通常叫做 由 $\mathcal{S}$ 所张的平直子集 (the rectilinear subset spanned by $\mathcal{S}$)，我们将以 $<\mathcal{S}>$ 表示之。

注意：我们将把空集合 ϕ 和单点集合 $\{P\}$ 想成凸子集和平直子集的特例。(因为它们根本不会含有相异两点，所以其检验条件无从用起！)

【例子】：

(1) 当 $\mathcal{S} = \{A\}$ 只含有单个点者，则

$$C\big(\{A\}\big) = \{A\}, \quad <\{A\}>= \{A\}$$

(2) 当 $\mathcal{S} = \{A, B\}$ 是由相异两点组成者，则

$$C\big(\{A, B\}\big) = \overline{AB}, \quad <\{A, B\}>= AB$$

(3) 当 $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$ 而且 A, B, C 不共线，则

$$C\big(\{A, B, C\}\big) = \triangle ABC,$$
$<\{A, B, C\}>$ 是由不共线三点所张的平面。

(4) 当 $\mathcal{S}=\{A,B,C,D\}$ 是由不共面四点所组成者，则

$C(\{A,B,C,D\})$是以 A,B,C,D 为其顶点的四面体，
它的四个面就是 $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$ 和 $\triangle DAB$，
而其所张的平直子集已经是全空间了！

$$<\{A,B,C,D\}> = \text{全空间。}$$

所以空间中的平直子集只有五种，即空集合 ϕ，单点子集 $\{P\}$，直线，平面和全空间。

由此可见，平面乃是仅次于全空间的平直子集，它是一种介乎于直线和全空间之间，而又具有连点直线段和直线这种空间基本结构的子空间。所以，平面乃是一种既比空间简单而又保有空间基本结构的几何结构。平面几何学的课题就是研究平面上所保有的空间基本结构和所反映的各种性质。它是进而研讨空间（立体）几何学的自然而且非常理想的中途站。

0.2 平面上的次序与分隔

类似于点和直线之间的关系，在平面 Π 中的任给一条直线 ℓ 也把平面 Π 切成两片，称之为 ℓ 的两侧。居于同侧的两点 A_1, A_2，其直线段 $\overline{A_1A_2}$ 和 ℓ 不相交；而居于异侧的两点 A, B，其直线段 $\overline{AB}$ 和 ℓ 相交。设 $\{A,B,C\}$ 是 $\Pi\setminus\ell$ 中的相异三点，而且 $\overline{AB}\cap\ell\neq\phi$，则 $\overline{AC}\cap\ell$ 和 $\overline{BC}\cap\ell$ 之中有一且仅有一为非空的。

上面所讨论的是平面在连结（亦即 $\{A,B\}\to\overline{AB}$ 和 AB ）和次序分隔上的基本结构和基本性质。现在让我们再来探讨平面在这种基础之上所具有的进一层的本质和基本性质，例如常见常用的长度、角度、大小、形状等等。

由平面的分隔，即一个平面 Π 被其上的一条直线分割成两个半面，亦即 $\Pi\setminus\ell = H_\ell^+\cup H_\ell^-$，我们将称之为对于 ℓ 的两个开半面 (open half-plane with respect to ℓ)，而 $H_\ell^+\cup\ell$ 和 $H_\ell^-\cup\ell$ 则称之为对于 ℓ 的闭半面 (close half-plane with respect to ℓ)，易证它们都是凸子集。
[证明留作习题]

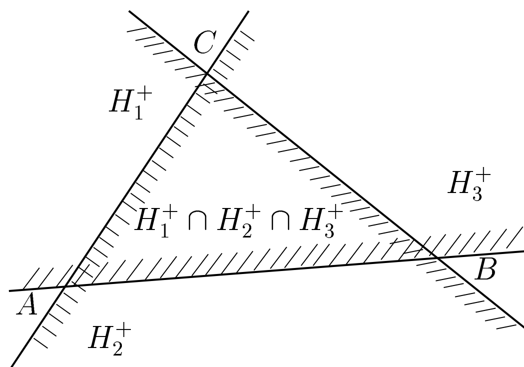
设 $\{A,B,C\}$ 是不共线三点，Π 是其所张的平面。令

H_1^+ 是对于直线 BC 的闭半面而且含有 A 者，

H_2^+ 是对于直线 CA 的闭半面而且含有 B 者，

H_3^+ 是对于直线 AB 的闭半面而且含有 C 者；

则凸子集 $H_1^+ \cap H_2^+ \cap H_3^+$（如 [图 0–2] 所示）就是一个以 A, B, C 为其顶点的三角形，通常以 $\triangle ABC$ 表示之。
[习题：试证它正是 $\{A,B,C\}$ 的凸包。]



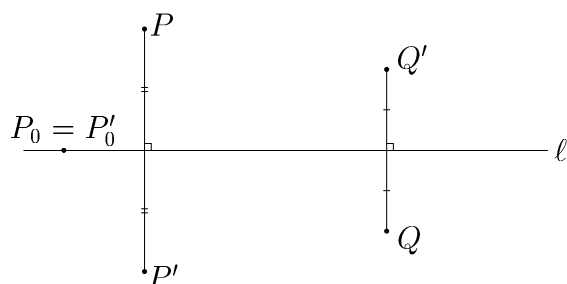
[图 0–2]

在几何学的研讨中，三角形是仅次于直线段和直线的基本几何图形，而空间的大部分基本性质都已经在三角形的几何性质中充分体现。三角形之所以成为古希腊几何学所研讨的主角，其原因也就是：三角形既简单而又能充分反映空间的本质。

大体上来说，空间的本质最为基本者就是前面已经讨论的连结、分隔再加上对称性，平行性和连续性。

0.3 对称性

在平面几何的范畴来说，平面对于其上每一条直线皆成反射对称。用现代的术语来说，平面 Π 上对于直线 ℓ 的反射对称是一个从 Π 到 Π 的映射（亦称为变换）$\mathfrak{R}_\ell : \Pi \to \Pi$，它把 ℓ 的点固定不动，把不在 ℓ 的点如 P 点映射到 P' 点使得 $\overline{PP'}$ 和 ℓ 正交于 $\overline{PP'}$ 的中点，如 [图 0–3] 所示。

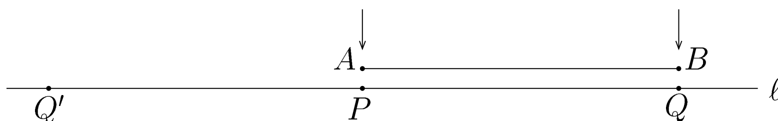


[图 0–3]

假如把一张纸想成是平面的局部，则在上述反射对称 $\mathfrak{R}_\ell$ 之下相互对应的点 P, P' 也就是把纸张沿 ℓ 折摺时相互叠合者。而二个相互叠合的直线段（或角区）则显然是等长（或等角）的。由此可见这种反射对称乃是一种保长、保角的变换。

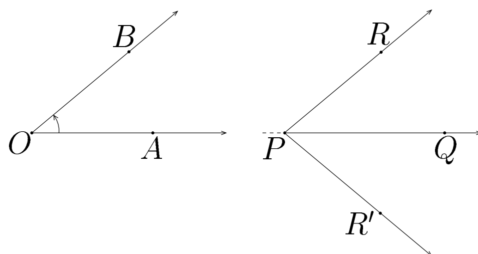
[注]：古希腊的几何学家肯定是认识到上述反射对称性及其保长保角性的。也许他们认为这种描述还不够初等，所以他们改用下述三条叠合公理来描述空间对称性这种本质。

1. 直线段的叠合公理：设 $\overline{AB}$ 是一个给定直线段，P 是给定直线上一个给定点。则在 P 的两侧各有唯一一点 Q, Q' 使得 $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}$, $\overline{PQ'}$ 能够叠合，亦即等长。



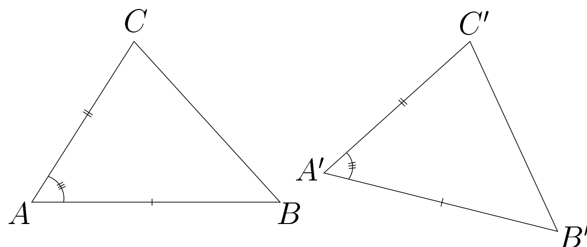
[图 0–4]

2. 角区的叠合公理：设 $\angle AOB$ 是一个给定角，$\overrightarrow{PQ}$ 是一个给定射线，则在直线 PQ 的两侧各有唯一的射线 $\overrightarrow{PR}$ 和 $\overrightarrow{PR'}$，使得 $\angle AOB$ 和 $\angle QPR$ 或 $\angle QPR'$ 能够叠合，亦即等角。



[图 0–5]

3. 三角形的叠合公理：两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 能够相互叠合（亦称之为全等）的充要条件是它有相应的两边及其夹角 (S.A.S.) 能够彼此叠合（亦即对应等长和等角）。



[图 0–6]

例如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 之间有 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 等长，$\overline{AC}$ 和 $\overline{A'C'}$ 等长，而且 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 等角；则必有 $\overline{BC}$ 和 $\overline{B'C'}$ 等长，$\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 等角和 $\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$ 等角。

[注]：上述三条叠合公理之中，第一条和第二条其实是用来确立等长和等角这两个基本概念，而第三条才是真正的反映著空间对称性这种本质。再者，他们用上述公理推导的第一个定理就是等腰三角形 $\triangle ABC$（即 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 等长）是对于其顶角平分线成反射对称的，然後以等腰三角形为工具去探索空间对称性各种各样广泛而且深远的影响。

0.4 平行性

平面上的一条射线表达了一个方向，而一条直线则是具有两个相反的方向。再者两条共起点的射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 在方向上的差别也就是 $\angle BAC$ 的角度所表达者，亦即角度乃是其方向差的度量是也。在平面几何中，两个射线同向平行的直观内含是两者所表达的方向相同。以下让我们来分析一下，这种「方向相同」的概念究竟应该如何定义才算是合理。

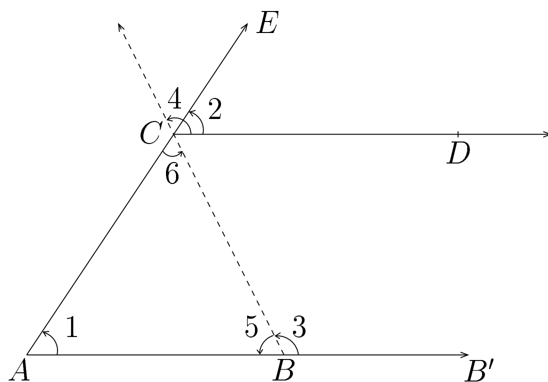
【分析】：

1. 若 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 共在一条直线上，则易见两者同向的充要条件是

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \begin{cases} \overrightarrow{AB}, & \text{或} \\ \overrightarrow{CD}. \end{cases}$$

[在两者反向时 $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD}$ 的可能性是 ϕ，单点或一个有限长线段。]

2. 在 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 不共线的情形，连结 $\overrightarrow{AC}$。如 [图 0–7] 所示，$\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CE}$ 共线同向，而 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 则分别度量着 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{CE}$ 的方向差。由此可见，$\angle 1 = \angle 2$ 应该是检验 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是否方向相等的合理条件，因为「等向」减「等向」应该还是相等者，是不？



[图 0–7]

3. 假如我们采取上述「合理」的条件来定义 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 是否「等向」，即 $\angle 1 = \angle 2$ 表示 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$「等向」。令 $\overrightarrow{BB'}$ 是和 $\overrightarrow{AB}$ 共线同向者，则由

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB'} \text{「等向」和 } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{「等向」}$$

当然也应该有 $\overrightarrow{BB'}$ 和 $\overrightarrow{CD}$「等向」。因此如 [图 0–7] 所示的 $\angle 3$ <u>应该</u>等于 $\angle 4$。再者，由 [图 0–7] 所示

$$\angle 4 = \angle 6 + \angle 2, \quad \angle 3 + \angle 5 = \text{平角 } (\pi)$$

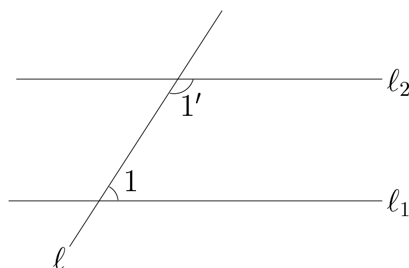
所以

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ 和 } \angle 3 = \angle 4$$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 6 + \angle 5 = \angle 2 + \angle 6 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 5 = \pi$$

上面三点分析说明了平面上的「等向」概念是否能够合理地定义而又不产生矛盾，那就要看三角形的内角和是否恒等于一个平角 (π)。换句话说，平面的平行性和三角形的内角和恒等于 π 其实是同一件事的两种表现。

[注]：在古希腊的欧几里得的 “Elements” 中, 以下述平行公理来描述平行性，即设平面上两条直线 ℓ_1, ℓ_2 和第三条直线 ℓ 相交：



[图 0–8]

若同傍内角 $\angle 1, \angle 1'$ 之和小于 π，则 ℓ_1, ℓ_2 必定相交于 ℓ 的 $\angle 1, \angle 1'$ 所在的那一侧。

平行性在平面几何中所扮演的角色是它使得定量几何中的各种公式都大大的简化。例如三角形的面积公式是「底 $\times$ 高 $\div 2$」，直角三角形的三边满足勾方加股方等于弦方，以及相似三角形定理等等都是必须依赖于平行性的！

[注]：空间的连续性在直观上业已由一条直线乃是连续不断的，但是它又是「一剪即断」，亦即一条直线 ℓ 略去其中任给一点 P 後，即已分割成两断。但是上述连续性的深入理解和深远影响则有待往後在适当的地方再详加研讨。

第一章

连结、分隔与对称——定性平面几何

定性平面几何所要研讨的主题是「全等形」和「平行性」。在本质上，前者乃是平面对于任给直线的反射对称性的具体反映，而後者则是三角形的内角和恒等于一个平角 (π) 所表达的「平直性」。在本章中，我们将以一个平面上连结与分隔的基本结构和三个叠合公理为基础，把定性平面几何中常用的基本事实，作一次简明扼要的逻辑推导和系统化整理。而关于平行性的讨论，则会留待下一章再作系统整理；亦即在本章的论证中，我们将会完全避免用平行性，所以所证得的结果，在非欧面也同样成立！

为了简化叙述起见，往後将会用 $\overline{AB}$ 同时表示该直线段子集及其长度，$\angle ABC$ 同时表示该角区及其角度（亦即 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的方向差）等等。而一些集合的表述方式如 $\mathcal{S} = <\ell_1 \cup \ell_2 \cup \{A\}>$ 和 $\{P\} = AB \cap CD$ 将会简化为 $\mathcal{S} = <\ell_1, \ell_2, A>$ 和 $P = AB \cap CD$ 等等。

1.1 等腰三角形的特徵性质

在各种各样的平面图形之中，三角形乃是最为简单者；而在各种各样的三角形之中，最为基本者则首推等腰三角形。究其原因，就是等腰三角形所具有的轴对称能够具体而微地反映著平面的反射对称性，所以它们乃是研讨平面几何之中对称性的种种表现与推论的基本工具。所以定性平面几何的首要之务，就是推导等腰三角形的各种各样的特徵性质，亦即：

等腰三角形的特徵性质：（如 [图 1–1] 所示）

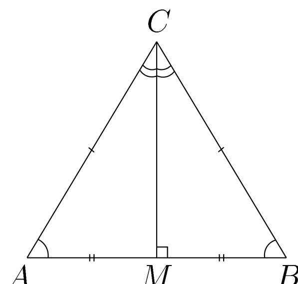
(i) $\overline{CA} = \overline{CB}$（定义）；

(ii) $\angle A = \angle B$；

(iii) $\angle C$ 的分角线 $\overline{CM}$ 垂直底边 $\overline{AB}$；

(iv) 中线 $\overline{CM}$ 垂直底边；

(v) 垂线 $\overline{CM}$ 平分顶角。



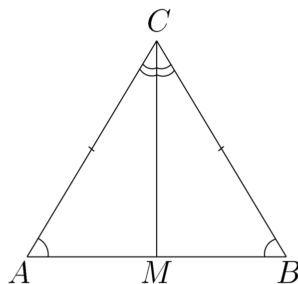
[图 1–1]

上述特徵性质的系统推导如下：

【定理 1.1】：设 $\triangle ABC$ 的两边为等腰，即 $\overline{CA} = \overline{CB}$，则其顶角 $\angle C$ 的分角线垂直平分底边，而且其两底角相等，即有 $\angle A = \angle B$。

证明：设 $\overline{CM}$ 平分顶角，由所设 $\triangle MCA$ 和 $\triangle MCB$ 满足 S.A.S. 全等条件。所以

$$\angle A = \angle B,\ \overline{AM} = \overline{MB},\ \angle CMA = \angle CMB = \frac{\pi}{2} \qquad \square$$



[图 1–2]

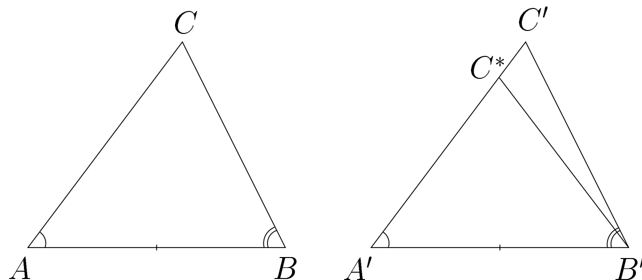
[注]：如上所证，$\overline{CM}$ 乃是等腰三角形 $\triangle ABC$ 的对称轴。等腰三角形乃是平面图形中具有轴对称的最简单者，因此它也是最便于用来分析平面对称性在各种各样几何问题中的作用的「工具」。上述定理已证明由 (i) 可推得馀下各个性质；反之，由 (iii), (iv) 或 (v) 即有 $\triangle MCA \cong \triangle MCB$ [证明留作习题]，即得回 (i)。所以现在还需验证馀下的 (ii)⇒(i)，其证明可以由下述一个熟知的叠合条件 A.S.A. 来推导而得：

【定理 1.2】：(A.S.A.) 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 满足 $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$ 而且 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$，则 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

证明：若 $\overline{AC} = \overline{A'C'}$，则两者已经满足 S.A.S. 全等条件。不然，不妨设 $\overline{A'C'} > \overline{AC}$。在 $\overline{A'C'}$ 上取 C^* 点使得 $\overline{A'C^*} = \overline{AC}$，则有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C^*$ (S.A.S.)，所以

$$\angle ABC = \angle A'B'C^* < \angle A'B'C'$$

显然和所设 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ 矛盾。 □



[图 1–3]

【定理 1.3】：若 $\triangle ABC$ 的两底角相等，即 $\angle A = \angle B$，则 $\triangle ABC$ 必为等腰，亦即 $\overline{CA} = \overline{CB}$。

证明：由所设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACB$ 满足 A.S.A. 条件，用[定理 1.2]即得 $\triangle ABC \cong \triangle ACB$，所以 $\overline{CA} = \overline{CB}$。 □

1.2 定性平面几何中的常用基本事实

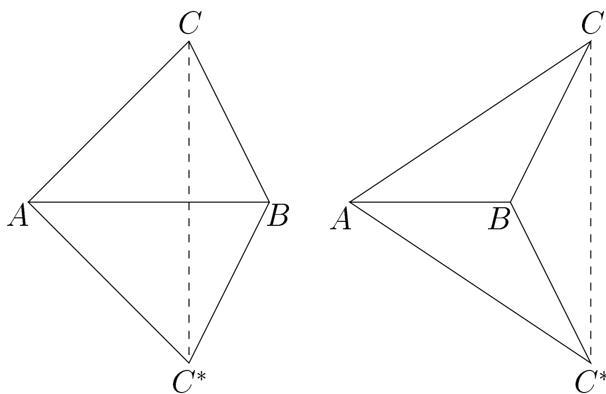
在定性平面几何中还有其他的叠合条件、作图题和不等式，它们都可以用等腰三角形的特徵性质来系统地推导而得。运用这些基本的事实，我们还可以证明三角形内角和不大于一个平角（详见本章之末）。

【定理 1.4】：(S.S.S.) 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三边对应等长，则 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

证明：如 [图 1–4] 所示，我们可以在 $\overline{AB}$ 的另一侧作 $\triangle ABC^*$ 使得 $\angle BAC^* = \angle B'A'C'$, $\overline{AC^*} = \overline{A'C'}$，则有 $\triangle ABC^* \cong \triangle A'B'C'$ (S.A.S)，所以 $\overline{BC^*} = \overline{B'C'} = \overline{BC}$。连结 $\overline{CC^*}$，由所设 $\triangle ACC^*$ 和 $\triangle BCC^*$ 皆为等腰。再由[定理 1.1]，即有

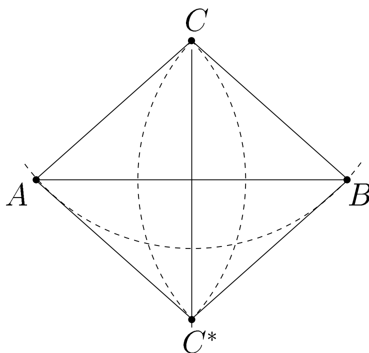
$$\begin{aligned}
&\angle ACC^* = \angle AC^*C,\ \angle BCC^* = \angle BC^*C \\
&\Rightarrow \angle ACB = \angle AC^*B \\
&\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABC^* \quad \text{(S.A.S.)} \\
&\qquad\qquad\ \ \cong \triangle A'B'C' \quad \text{(所作)}
\end{aligned}$$

□



[图 1–4]

【基本作图题 1.1】：作一个给定角的分角线。



[图 1–5]

[作法] 以给定角顶点 C 为圆心，任取一半径在其角边之两条射线上分别截取 $\overline{CA} = \overline{CB} = r$，如 [图 1–5] 所示。在 AB 的另一侧有一个 C^*，

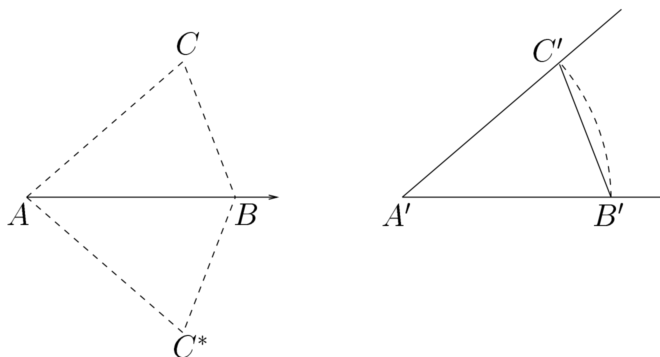
使得

$$\overline{AC^*} = \overline{AC} = \overline{BC^*} = \overline{BC} = r$$

而 C^* 可以由以 r 为半径分别以 A, B 为圆心的交截而得（C 和 C^* 分别是这两个圆的交点）。连结 $\overline{CC^*}$，即为所求之 $\angle C$ 的分角线。

证明：由所作 $\triangle ACC^* \cong \triangle BCC^*$ (S.S.S.)，所以 $\angle ACC^* = \angle BCC^*$ 而且 A, B 分居于 CC^* 之两侧。所以 $\overline{CC^*}$ 平分 $\angle C$。 □

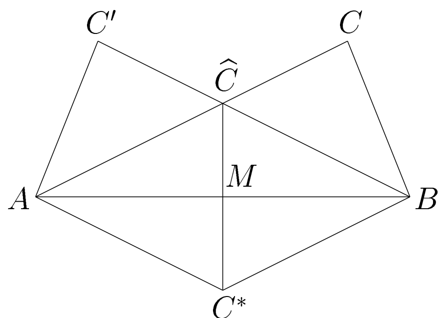
【基本作图题 1.2】：在射线 $\overrightarrow{AB}$ 之一侧作另一射线 $\overrightarrow{AC}$ 使得 $\angle BAC$ 等于一个给定角 $\angle A'$。



[图 1–6]

[作法] 以 $\overline{AB}$ 为半径，A' 为圆心，分别在 $\angle A'$ 的两个角边上截取 $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{AB}$。再以 A 为圆心，$\overline{AB}$ 为半径和以 B 为圆心，$\overline{B'C'}$ 为半径各作一圆而得两个分居于 AB 两侧的交点 C 和 C^*。由所作即有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC^*$ (S.S.S.)。 □

【基本作图题 1.3】：作一给定线段 $\overline{AB}$ 的垂直平分线。



[图 1–7]

[作法] 如 [图 1–7] 所示，在 AB 线外任取一点 C。若 $\overline{AC}=\overline{BC}$，则可以由[基本作图 1.1]的作法求得居于另一侧的 C^*，使得 $\overline{AC^*}=\overline{BC^*}$。则 CC^* 就是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线。

若 $\overline{AC}\neq\overline{BC}$，则可在 AB 同侧再作 C' 点使得 $\triangle BAC'\cong\triangle ABC$。它们的两对对应边，即

$$\{\overline{AC},\overline{BC'}\} \quad 和 \quad \{\overline{BC},\overline{AC'}\}$$

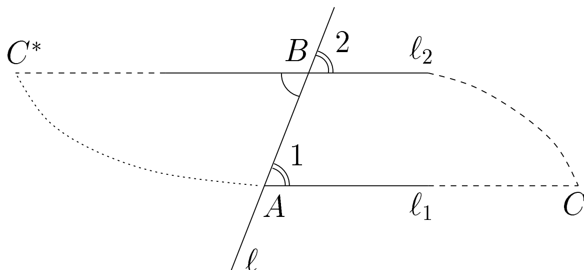
之中必有一对相交与一点 $\widehat{C}$（如 [图 1–7] 所示）。由[定理 1.3]，$\overline{A\widehat{C}}=\overline{B\widehat{C}}$，所以可以用前面的作法求得 AB 的另一侧的 C^* 点，使得

$$\overline{AC^*}=\overline{A\widehat{C}}=\overline{BC^*}=\overline{B\widehat{C}}$$

则 $\widehat{C}C^*$ 就是所求作的垂直平分线。

证明：由所作，$\triangle AB\widehat{C}$ 是等腰，而且 $\widehat{C}C^*$ 平分其顶角。由此易见 $\triangle A\widehat{C}M\cong\triangle B\widehat{C}M$ (S.A.S.)，所以 $\overline{AM}=\overline{BM}$，$\angle AM\widehat{C}=\angle BM\widehat{C}=$ 直角。 □

【定理 1.5】：设有相异直线 ℓ_1,ℓ_2 分别和第三条直线 ℓ 相交，若同位角相等（如 [图 1–8] 所示，$\angle 1=\angle 2$），则 ℓ_1,ℓ_2 不相交。



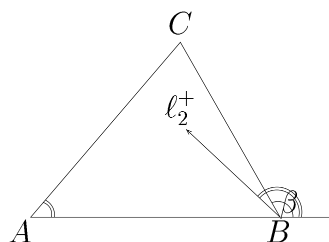
[图 1–8]

证明：我们用反证法，设 $C=\ell_1\cap\ell_2$。在 ℓ_2 上取 $\overline{BC^*}=\overline{AC}$，$\{C,C^*\}$ 分居 ℓ 的两侧，连结 $\overline{C^*A}$。则由所作 $\triangle ABC^*$ 和 $\triangle BAC$ 满足 S.A.S.，所以两者全等。由此可得

$$\angle BAC^*+\angle 1=\angle ABC+\angle 2=\pi \quad （平角）$$

因此 $C^*A=AC=\ell_1$，而 ℓ_1,ℓ_2 相交于分居 ℓ 的两侧的 C 和 C^*。这显然和二点确定唯一一条直线相矛盾。所以 ℓ_1 和 ℓ_2 是不可能相交的！ □

【定理 1.6】：三角形的任一外角大于其任一内对角。即如 [图 1–9] 所示，$\angle\beta$ 大于 $\angle A$ 和 $\angle C$。



[图 1–9]

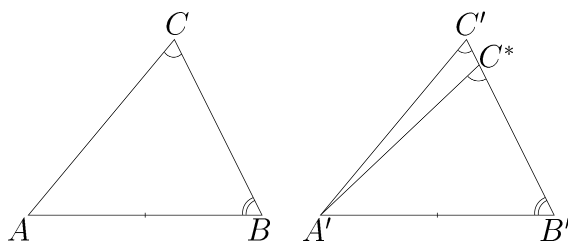
证明：这是[定理 1.5]的直接推论。兹用反证法证之如下：设 B 点的外角 $\angle\beta$ 小于 $\angle A$，则过 B 点作直线 ℓ_2，使得它和 $\ell_1 = AC$ 具有相等的同位角。由[定理 1.5]，ℓ_2 和 ℓ_1 不相交。但是由假设 $\angle\beta < \angle A =$ 同位角，射线 ℓ_2^+ 是夹在 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 之间的。所以 A, C 分居于 ℓ_2 的两侧，故此 ℓ_2 和 $\overline{AC}$ 必须相交，亦即和[定理 1.5]相矛盾。这也就证明了外角 $\angle\beta$ 必须都大于其二个内对角 $\angle A, \angle C$。 □

【定理 1.7】：(A.A.S.) 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 满足 $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \angle B = \angle B'$ 和 $\angle C = \angle C'$，则 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

证明：若两者还有 $\overline{BC} = \overline{B'C'}$，则两者其实已经满足 S.A.S.。假若不然，可设 $\overline{BC} < \overline{B'C'}$。在 $\overline{B'C'}$ 上取 C^* 点使得 $\overline{B'C^*} = \overline{BC}$，则有

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C^* \qquad \text{(S.A.S.)}$$

所以 $\angle A'C^*B' = \angle C = \angle C'$，亦即 $\triangle A'C^*C'$ 的外角等于其中一个内对角，这是和[定理 1.6]（或者[定理 1.5]）相矛盾的。所以 $\overline{BC}$ 和 $\overline{B'C'}$ 必须等长，亦即 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。 □

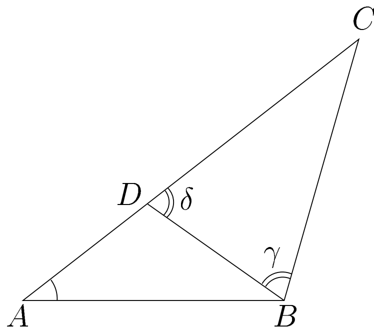


[图 1–10]

[注]：上述的证明中没有用到平直性。若有平直性，即三角形内角和恒为平角，则 A.A.S. 是 A.S.A. 的直接推论。

【定理 1.8】：大边对大角，大角对大边。

证明：先证大边对大角。设 $\triangle ABC$ 的边长中 $\overline{AC} > \overline{BC}$，我们要证明 $\angle ABC > \angle BAC$。



[图 1–11]

证明：如 [图 1–11] 所示，在 $\overline{AC}$ 上取 D 点使得 $\overline{DC} = \overline{BC}$，则有等腰三角形 $\triangle BCD$ 的两底角 $\angle\gamma = \angle\delta$，而 $\angle\delta$ 是 $\triangle ABD$ 的 D 点外角，所以即有

$$\angle ABC > \angle\gamma = \angle\delta > \angle BAC$$

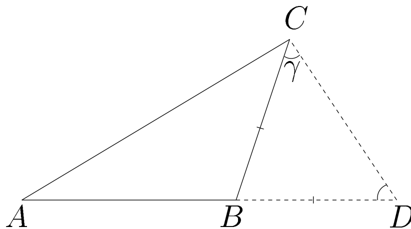
[大角对大边的证明留作习题] □

【定理 1.9】：三角形的两边之和大于第三边，即

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

证明：如 [图 1–12] 所示，在 $\overline{AB}$ 的延线上取 $\overline{BD} = \overline{BC}$，则等腰三角形 $\triangle BDC$ 的两底角相等，所以在 $\triangle ADC$ 中 $\angle ACD > \angle\gamma = \angle ADC$，即有

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} > \overline{AC}$$ □



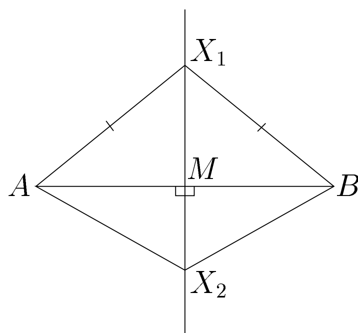
[图 1–12]

【定理 1.10】：在平面 Π 上给定两个相异点 A, B，其等距的点所成的子集

$$\mathcal{S} = \{X \in \Pi,\ \overline{AX} = \overline{BX}\}$$

乃是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线。

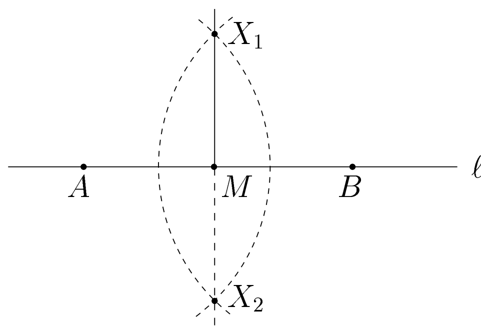
证明：令 M 为 $\overline{AB}$ 的中点，X_1 为 $\mathcal{S}$ 中任给一点，则有 $\triangle X_1AB$ 等腰，所以 $XM \perp AB$。反之，若 X_2 是 $\overline{AB}$ 中垂线上任给一点，则 $\triangle X_2MA \cong \triangle X_2MB$ (S.A.S.)，所以 $\overline{X_2A} = \overline{X_2B}$，亦即 $X \in \mathcal{S}$。 □



[图 1–13]

【基本作图题 1.4】：过直线 ℓ 上一点 M，作其垂直线。

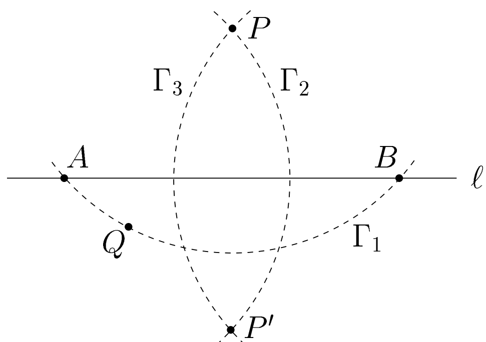
[作法] 在 ℓ 上 M 点的两侧各取 A, B 使得 M 是 $\overline{AB}$ 的中点，再用圆规作两个分别以 A, B 为圆心，以相同但是大于 $\overline{AM}$ 为半径的圆。则两圆会交于 X_1, X_2 两点，而 X_1X_2 即为所求作者。 [证明留作习题]



[图 1–14]

【基本作图题 1.5】：设 P 是直线 ℓ 之外一点，作过 P 点而且和 ℓ 垂直的直线。

[作法] 在平面上取一点 Q，使得 P, Q 分居 ℓ 线的两侧，如 [图 1–15] 所示。以 $\overline{PQ}$ 为半径，先以 P 点为圆心作 Γ_1，与 ℓ 交于 A, B 两点。然後分别以 A, B 为圆心作 Γ_2, Γ_3， 得 $\Gamma_2 \cap \Gamma_3$ 的两交点 P, P'。 则 $\overline{PP'}$ 被 ℓ 所垂直平分。[证明留作习题]



[图 1–15]

【定义】：对于平面上一条给定直线 ℓ，线外两点 P, P' 若满足 $\overline{PP'}$ 被 ℓ 垂直平分，则称 P, P' 对于 ℓ 成反射对称。
[上述作图题说明如何去由 P 作出 P'。]

【定义】：平面对于给定直线 ℓ 的反射对称 $\mathfrak{R}_\ell$ 是平面到自身的一个映射。它把线上的点映射到自己，线外的点映射到其反射对称点 P，即

$$\begin{cases} \text{若 } P \in \ell\text{，则 } \mathfrak{R}_\ell(P) = P\text{；} \\ \text{若 } P \notin \ell\text{，则 } \mathfrak{R}_\ell(P) = P', \overline{PP'} \text{ 被 } \ell \text{ 垂直平分。} \end{cases}$$

【定理 1.11】：$\mathfrak{R}_\ell$ 是平面上的一个保长变换，即：

$$\overline{\mathfrak{R}_\ell(P)\mathfrak{R}_\ell(Q)} = \overline{PQ}$$

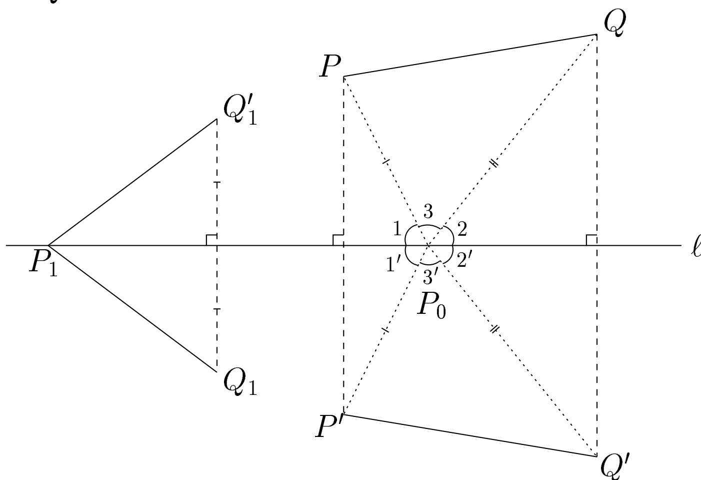
对于平面上任给两点 P, Q 皆成立。

证明：在此，将采用简约符号 P' 表示 $\mathfrak{R}_\ell(P)$。

(i) 若 $P, Q \in \ell$, 则 $P' = P$, $Q' = Q$，即 $\overline{P'Q'}$ 和 $\overline{PQ}$ 是同一直线段。

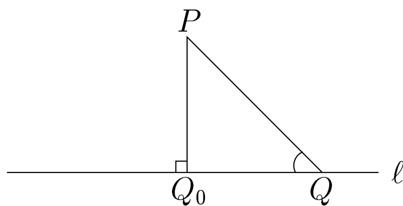
(ii) 若 $P \in \ell$, $Q \notin \ell$，则 $\triangle PQQ'$ 的底边 $\overline{QQ'}$ 被 ℓ 所垂直平分，即有 $\triangle PQM \cong \triangle PQ'M$。所以 $\overline{P'Q'} = \overline{PQ'} = \overline{PQ}$。

(iii) 若 $P, Q \notin \ell$，则在 ℓ 上取定一点 P_0。由 (ii) 之所证，$\triangle P_0PP'$ 和 $\triangle P_0QQ'$ 都是等腰三角形，因此 ℓ 乃是它们在顶角的平分线，由此可见 $\angle PP_0Q = \angle P'P_0Q'$。所以 $\triangle PP_0Q \cong \triangle P'P_0Q'$ (S.A.S.), $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$。 □



[图 1–16]

【定理 1.12】：从直线 ℓ 之外一点 P，到线上各点的距离以垂直线所给出者为唯一极小。



[图 1–17]

证明：设 $\overline{PQ_0}$ 和 ℓ 正交于 Q_0，Q 为 ℓ 上任给另外一点，则 $\triangle PQ_0Q$ 在 Q_0 点的外角是 $\frac{\pi}{2}$。由[定理 1.6]，即得 $\angle Q < \frac{\pi}{2} = \angle Q_0$。再由[定理 1.8]即得

$$\overline{PQ} > \overline{PQ_0}$$ □

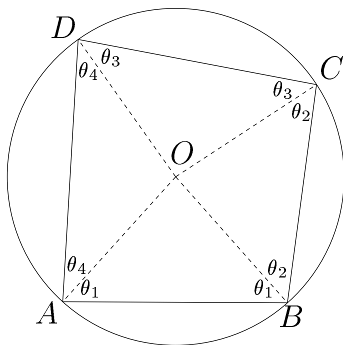
[注]：在这里没有用到勾股定理（勾股定理是依赖于平行性的）。

【定理 1.13】：设 $\Box ABCD$ 为圆内接四边形，亦即四个顶点 A, B, C, D 共圆。则有

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

证明：令 O 为 $\square ABCD$ 的外接圆圆心，则 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$ 皆为等腰，所以其底角分别相等。设其有向角为 $\theta_1, \theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_3, \theta_3, \theta_4, \theta_4$，则有

$$\angle A + \angle C = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \angle B + \angle D \qquad \square$$



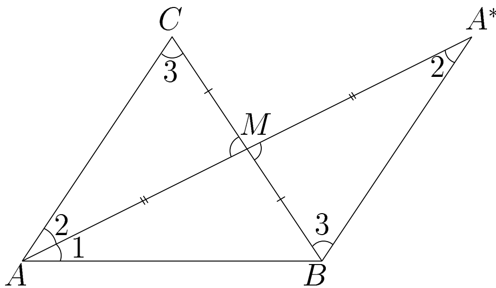
[图 1–18]

【定理 1.14】：三角形的内角和不大于 π。

证明：我们将用反证法，亦即设存在有一个内角和大于 π 的三角形 $\triangle ABC$，即有

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

我们要仅仅用叠合公理，连结与分隔去得出矛盾。设 $\angle A$ 是三个内角中的最小者，M 是 $\overline{BC}$ 的中点。如 [图 1–19] 所示，连结 $\overline{AM}$，延长一倍而得 A^*：



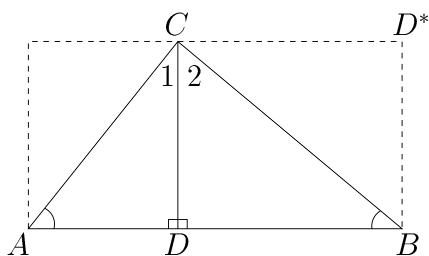
[图 1–19]

由所作易见 $\triangle MBA^* \cong \triangle MCA$ (S.A.S.)，所以 $\triangle ABA^*$ 的三个内角和也等于 $\pi + \varepsilon$，而且 $\angle 1 + \angle A^* = \angle A$。由此可见 $\triangle ABA^*$ 中的最小内角至

多只是原先 $\triangle ABC$ 的最小内角（$\angle A$）的一半。如此逐步构造，所得的三角形的内角和一直保持是 $\pi+\varepsilon$，而且其最小内角的大小每次至少减半。所以只要作足够多次，则其最小内角就肯定要比 ε 还要小！亦即其另外两个内角之和已经大于 π！这显然是和外角大于内对角（定理 1.6）相矛盾的。这也是证明了这种内角和大于平角的三角形其实是不可能存在的，亦即任何三角形的内角和不大于 π。 □

【定理 1.15】：若存在一个三角形其内角和等于 π，则任何三角形的内角和也必须等于 π。

证明：设有一个三角形 $\triangle ABC$ 其内角和等于 π，则由其大角 $\angle C$ 到其对边 $\overline{AB}$ 作垂线 $\overline{CD}$。

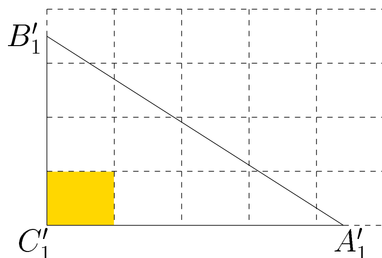


[图 1–20]

即有

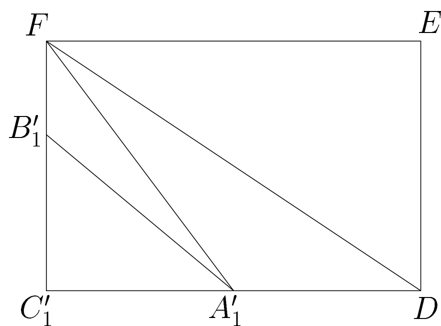
$$(\angle 1+\angle A+\frac{\pi}{2})+(\angle 2+\angle B+\frac{\pi}{2})=\angle A+\angle B+\angle C+\pi=2\pi$$
$$\angle 1+\angle A+\frac{\pi}{2}\le\pi,\quad \angle 2+\angle B+\frac{\pi}{2}\le\pi \qquad (\text{定理 } 1.14)$$

所以直角三角形 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CDB$ 的内角和也都等于 π。用其中之一即可得一个四内角皆为 $\frac{\pi}{2}$ 的「矩形」，如 [图 1–20] 所示的 $\square CDBD^*$。将这个矩形逐一堆砌即可得出长和宽都可以任意大的矩形，如 [图 1–21] 所示：



[图 1–21]

现在我们要用[定理 1.14]来证明任何直角三角形的内角和都必然等于 π。设 $\triangle A_1B_1C_1$ 是一个任给直角三角形，$\angle C_1 = \frac{\pi}{2}$，我们可以 [图 1–21] 所作的那个足够大的矩形构造 $\triangle A_1'B_1'C_1' \cong \triangle A_1B_1C_1$，使得其直角边 $\overline{A_1'C_1'}$ 和 $\overline{B_1'C_1'}$ 都包含在该矩形的两个直角边之内。而由 [图 1–22] 所示：



[图 1–22]

$$\begin{aligned}
&\triangle C_1'DF \text{ 的内角和} = \pi \\
&\quad\Rightarrow \triangle C_1'A_1'F \text{ 的内角和} + \triangle A_1'DF \text{ 的内角和} = 2\pi \\
&\quad\Rightarrow \triangle C_1'A_1'F \text{ 的内角和} = \pi \qquad\qquad (\text{定理 } 1.14) \\
&\quad\Rightarrow \triangle A_1'B_1'C_1' \text{ 的内角和} + \triangle A_1'B_1'F \text{ 的内角和} = 2\pi \\
&\quad\Rightarrow \triangle A_1'B_1'C_1' \text{ 的内角和} = \pi \qquad\qquad (\text{定理 } 1.14)
\end{aligned}$$

这样就证明了任何直角三角形的内角和皆等于 π。而任何三角形都可以像 [图 1–20] 那样分割成两个直角三角形，所以它的内角和也必然等于 π。 □

[注]：[定理 1.14]和[定理 1.15]证明了在任何满足连结、分隔和叠合（对称性）的几何之中，三角形的内角和不是恒等于 π 就是恒小于 π。前者是欧氏几何，而後者则是非欧几何。在後者的情形，我们还可以证明下述角亏 (angle defect)

$$\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$$

和 $\triangle ABC$ 的面积成比例。

1.3 例题和习题

【例题】：

(1) 光的反射定律与极小性：光的反射定律是

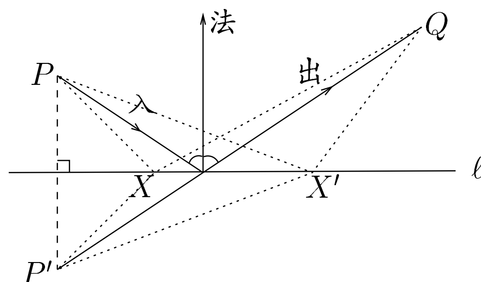
> 「入射线、反射线和平面在反射点的法线三线共面，而且两者和法线的夹角相等。」

上述定律的几何意义乃是光反射之途径是在所有下述通路

$$\overline{PX}+\overline{XQ},\quad X\in\ell$$

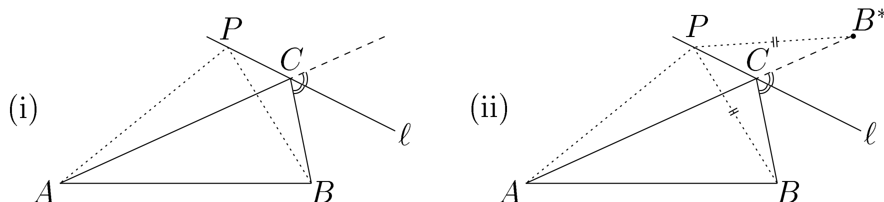
之中取极小值。如 [图 1–23] 所示，

$$\begin{aligned}&\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{P'A}+\overline{AQ}=\overline{P'Q}\\ \le\ &\overline{PX}+\overline{XQ}=\overline{P'X}+\overline{XQ}\end{aligned}$$



[图 1–23]

(2) 给定 $\triangle ABC$，如[图 1–24(i)]所示令 ℓ 为 C 点外角的分角线。设 P 是 ℓ 上一点，$P\neq C$，则恒有 $\overline{AP}+\overline{PB}>\overline{AC}+\overline{CB}$。



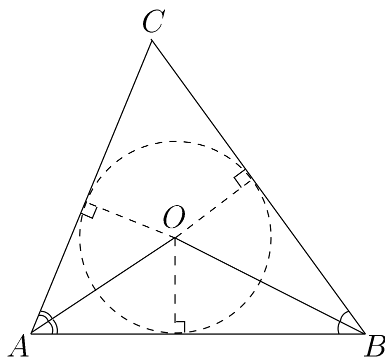
[图 1–24]

如[图 1–24(ii)]所示，令 B^* 为 B 相对于 ℓ 的反射对称点，所以即有 $\overline{PB} = \overline{PB^*}$。由此可见，

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PB} &= \overline{AP} + \overline{PB^*} \\ &> \overline{AB^*} = \overline{AC} + \overline{CB^*} \\ &= \overline{AC} + \overline{CB}\end{aligned}$$

(3) 内切圆作图：对于一个给定的 $\triangle ABC$，唯一存在一个和其三边相切的圆，称之为 $\triangle ABC$ 的内切圆（如 [图 1–25] 所示）。其作图法如下：

用[基本作图 1.1]，分别作 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的角平分线。则两线的交点 O' 乃是具有和三边等距的唯一之点，所以它就是所求作的内心（内切圆圆心）。



[图 1–25]

(4) 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 具有相同的外接圆，则

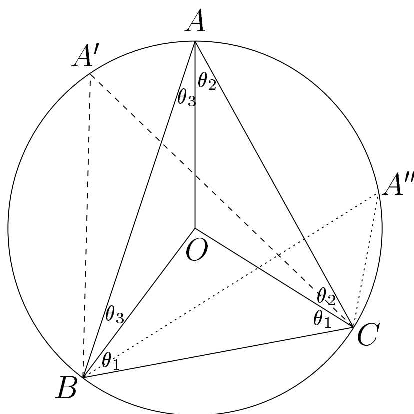
$$\angle ABC + \angle ACB - \angle BAC = \angle A'BC + \angle A'CB - \angle BA'C$$

证明：如 [图 1–26] 所示，$\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ 皆为等腰，所以其底角各别相等，即 [图 1–26] 所示之 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$。再者，

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle ACB - \angle BAC &= (\theta_1 + \theta_3) + (\theta_1 + \theta_2) - (\theta_2 + \theta_3) \\ &= 2\theta_1\end{aligned}$$

由此可见，上式之角度只和 $\overset{\frown}{BC}$ 的大小有关，而和 $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{AB}$ 的大小无关。

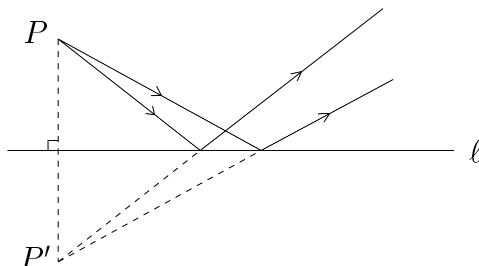
[注意：上式中的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 乃是有向角。如在 A'' 的情形，θ_3'' 是负向角。]



[图 1–26]

【习题】：

(1) 镜子成象的几何原理：令 P' 是 P 对于 ℓ 的反射对称点。试证起始于 P 点的反射线的延长线共交于 P' 点（如 [图 1–27] 所示）。



[图 1–27]

(2) 试证明在[定理 1.10]中的「大角对大边」部分。

(3) 试证明在[基本作图题 1.4]中的 X_1X_2 乃是过 ℓ 上 M 点的垂线。

(4) 试证明在[基本作图题 1.5]中的 PP' 乃是垂直于 ℓ 的直线。

(5) 设直线 ℓ 和圆 Γ 仅交于一点 P，试证 $\overline{OP} \perp \ell$。

(6) 过圆 Γ 上一点 P 作其切线 ℓ。

(7) 设四边形 $\square ABCD$ 的两对对边各别等长，试证：

(i) 其对角线互相平分；

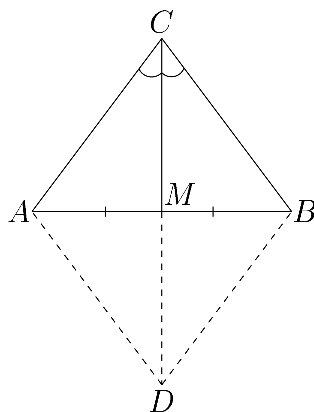
(ii) 其两对对角各别相等。

(8) 设四边形 $\square ABCD$ 的两对角线互相平分，试证：

(i) 其两对对边各别等长；

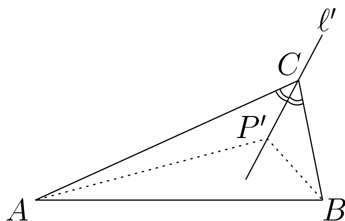
(ii) 其两对对角各别相等。

(9) 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 分角线等分对边 $\overline{AB}$，试证 $\overline{AC} = \overline{BC}$。[延长 $\overline{CM}$ 到 $\overline{CD} = 2\overline{CM}$（如 [图 1–28] 所示），则可运用习题 (8) 之结果。]



[图 1–28]

(10) 给定 $\triangle ABC$，如[图 1–29]所示令 ℓ' 为 $\angle C$ 的分角线，P' 是 ℓ' 上一点，$P' \neq C$，试证明 $\overline{AP'} - \overline{P'B} < \overline{AC} - \overline{CB}$。



[图 1–29]

第二章

平行性与定量平面几何基础理论

一般来说，我们对于事物的研究，大体上都先作定性的探讨，然後再进而作定量的分析。这是一种由表及里、逐步深入、精益求精的自然进展，平面几何学的研究当然也遵循著这样一种自然的顺理成章的途径。由上一章的讨论中可以看到，在定性地探讨几何中的「等」与「不等」时，我们可以完全不用平行性；但是在定量的平面几何中，我们要对于不等长的两个线段，不同大小的两个角区或不同大小的两个区域，赋以两者之间定量的比值去度量 (measure) 两者之间的差别。在这个时候，平行性扮演著一个举足轻重的「要角」，其作用是大大简化了定量几何的基础理论和基本公式。换句话说，在定量几何中，三角形内角和是恒等于平角还是恒小于平角这两种几何开始有了重大的差别。前者的基本公式要比後者的基本公式简单得多！在前者有简朴易用的基本定理如矩形面积公式、勾股定理和相似三角形定理；而在後者所相应者，不是根本没有，就是要复杂得多。

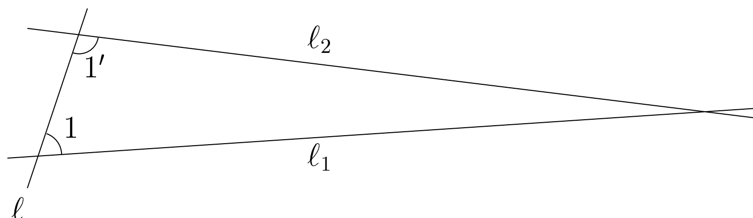
在本章中，我们将会简明扼要地讨论平行性如何反映在平面几何的基本定理之上。再者，我们还会比较分析一下古代中国和古希腊对于定量平面几何的治学方法。

2.1 平行性和三角形内角和

在欧几里德 (Euclid) 的原著《几何原本》 (“Elements”) 中，平面的平行性是用下述第五公设 (fifth postulate)，也就是我们通常称之为

平行公理 (parallel axiom) 者，来加以刻划的：

【第五公设】：设 ℓ_1, ℓ_2 和 ℓ 是平面上三条相异直线，若 ℓ 和 ℓ_1, ℓ_2 相交的同傍内角（如 [图 2–1] 所示之 $\angle 1$ 和 $\angle 1'$）之和小于平角，则 ℓ_1, ℓ_2 必定在 $\angle 1$ 和 $\angle 1'$ 的同侧相交。



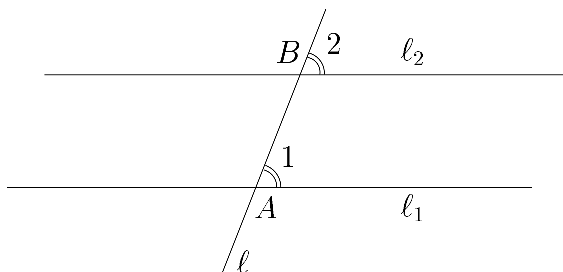
[图 2–1]

亦即

$$\angle 1 + \angle 1' < \text{平角} \quad \Rightarrow \quad \ell_1, \ell_2 \text{ 相交于 } \angle 1, \angle 1' \text{ 之同侧}$$

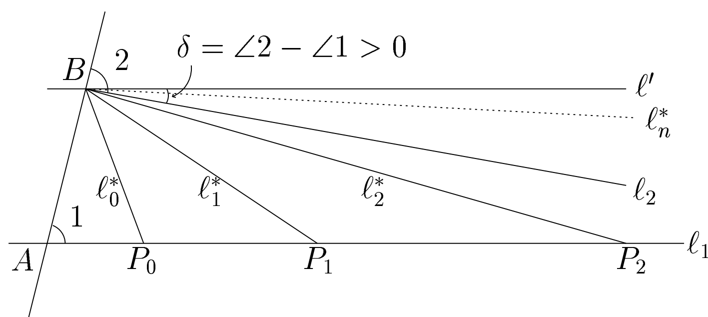
另一方面，在上一章中我们只需用到 S.A.S. 和「两点定唯一直线」就可以证明下述[定理 1.5]：

【定理 1.5】：若 $\angle 1 = \angle 2$，则 ℓ_1, ℓ_2 不相交。



[图 1–8′]

由此可见，上述的第五公设也就是以「公设」的方式宣称 $\angle 1 + \angle 1' = \pi$ 是 ℓ_1, ℓ_2 不相交的唯一可能性。换句话说，在平面上过直线 ℓ_1 外的一个给定点 P，而且和 ℓ_1 不相交的直线 ℓ_2 的存在性乃是已证的[定理 1.5]，而其唯一性则就是上述第五公设，亦即是使得同傍内角之和 $\angle 1 + \angle 1' = \pi$ 的那一条 ℓ_2 乃是唯一和 ℓ_1 不相交者。用这个唯一性之所设，就不难推导平直性：三角形内角和恒为一平角（其证明留作习题）。其实，反之亦可用平直性来证明上述第五公设，其证法如下：



[图 2–2]

<u>证明</u>：如 [图 2–2] 所示，ℓ' 是使得同位角 $\angle 2' = \angle 1$ 者，由所设 $\delta = \angle 2 - \angle 2' = \angle 2 - \angle 1 > 0$。令 $\{P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots\}$ 是在 ℓ 上 A 点右侧之点列，满足

$$\overline{P_0P_1} = \overline{BP_0},\ \ \overline{P_1P_2} = \overline{BP_1},\ \ \ldots,\ \ \overline{P_nP_{n+1}} = \overline{BP_n}$$

亦即

$$\triangle BP_0P_1,\ \ \triangle BP_1P_2,\ \ \ldots,\ \ \triangle BP_nP_{n+1},\ \ \ldots$$

都是等腰三角形。由平直性和等腰三角形的底角相等，即有 ℓ' 和 $\ell_n^* = BP_n$ 之间的夹角逐次减半。所以在 n 足够大时，其值小于 $\delta = \angle 2 - \angle 1 > 0$，亦即当

$$2^n > \frac{\angle AP_0B}{\delta}$$

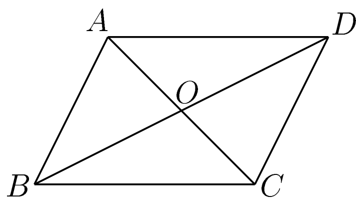
时，ℓ_n^* 业已夹在 ℓ_2 和 ℓ' 之间。但是由所作 ℓ_n^* 和 ℓ_1 相交于 P_n，所以 ℓ_2 必然和 ℓ_1 相交于线段 $\overline{AP_n}$ 之内。 □

[注意，上述证明之中，三角形内角和恒等于一个平角扮演著必不可缺的角色！所以上述论证只是证明了第五公设和平直性的逻辑等价性。]

2.2 平行性、平行四边形和面积公式

在上一章对于对称性的讨论中，得知等腰三角形就是那些具有轴对称性的三角形。而具有两对对边各别等长的四边形则是那些具有心对称的四边形（参看上一章习题）。它的对称中心就是其两条互相平分的对角线的交点，而且它的两对对角也各别相等。证明要点在于每一

条对角线把该四边形切为两个全等的三角形 (S.S.S.)，而两条对角线则把它切为两对互相全等的三角形 (A.S.A.)。



[图 2–3]

上述的论证只用到叠合条件，毋须平行性的帮助的。假如我们把平行性再用上去分析上述四边形的几何结构时，则由对角相等

$$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$$

和四内角和等于 2π 合起来就得出

$$\angle A + \angle B = \angle A + \angle D = \angle C + \angle B = \angle C + \angle D = \pi$$

亦即其对边互相平行：

$$AB // DC, \quad AD // BC$$

所以把这种四边形叫做平行四边形 (parallelogram)。我们把平行四边形的各种特徵性质总结如下，叙述为本章的[定理 2.1]。它是研讨平行性在几何学中各种各样的反映的主要工具。[它在平行性的研讨上所扮演的角色一如等腰三角形在对称的研讨上所扮演的角色——都是到处有用和好用的基本工具。]

【定理 2.1】：下列各特性皆为平行四边形的特徵性质。

(i) 两对对边互相平行（定义）。

(ii) 两对对边各别等长。

(iii) 两对对角各别等角。

(iv) 两条对角线互相平分。

(v) 有一对对边平行而且等长。

[上述五点的逻辑等价性大部分已经证过，而且证明的要点也在上面说明了，所以其逐一验证则留作习题。]

【定义】：四个内角皆相等（亦即都是直角）的四边形叫做矩形 (rectangle)，亦称为长方形。

【定义】：四个边长皆相等的四边形叫做菱形。

矩形的面积公式：

「矩形的面积等于长乘宽」，这是一个自古以来就在中外古今所熟知和惯用的公式。在中国的古算中，把它当做「显然成立者」，并用来作为推导其他定量几何的公式的起点和基点（详见下一节）。但是古希腊的几何学则进一步去追究这个看来相当明显的面积公式的真正涵意何在，并设法论证之。长话短说，让我们在此简明扼要地回顾一下古希腊当年在定量几何基础论上的探索历程：

几何学是古希腊文明最辉煌的成就，它是以古埃及和古巴比伦文明的几何知识为基础，集希腊的精英，历经好几世纪世代相承、精益求精的研究创造而成者，乃是人类文明中第一个趋于成熟的科学。古希腊的学者把几何学的研讨作为理解宇宙的基础学科，所以治学十分严谨，高度注重其基本概念的明确性和推理论证上的严格性。它不但是其他自然科学的基础所在，而且也是整个自然科学在思想上、方法论上治学的典范。古希腊几何学的进程是先研究定性平面几何，其研讨主题是全等形和平行性，然後再进而研讨定量平面几何，而且一开始他们就认识到直线段长度的度量 (measurement of length) 乃是定量几何研讨的起点和基础所在。通常的做法是先取定（或约定）一个单位长 (unit of length)，它可以是公尺、市尺、英尺，或光在真空走一秒的长度「光秒」，也可以是「光年」，然後把一个给定直线段的长度定义为它和单位长之间的「比值」 (ratio)。由此可见，长度度量这个基本概念的关键在于上述「比值」的明确定义。

设给定线段 a 恰好可以等分成 m 段和单位长 u 等长者首尾相接而成，则 a 和 u 之间的比值当然就是 m，而称这样的直线段 a 的长度是 m 单位。反之，若单位长 u 恰好可以等分成 n 段和 a 等长者首尾相接而成，则 a 和 u 之间的比值应该等于 $\frac{1}{n}$。再者，若 a 恰好可以等分成

m 段和 $\frac{1}{n}u$ 等长者连接而成，则 a 和 u 之间的比值应该定义为分数 $\frac{m}{n}$，称 a 的长度是 $\frac{m}{n}$ 单位，以 $a = \frac{m}{n}u$ 表达之。

大约在纪元之前五世纪前後，古希腊的几何学学界（例如毕氏及其门人）关于长度度量提出下述概念及论断：

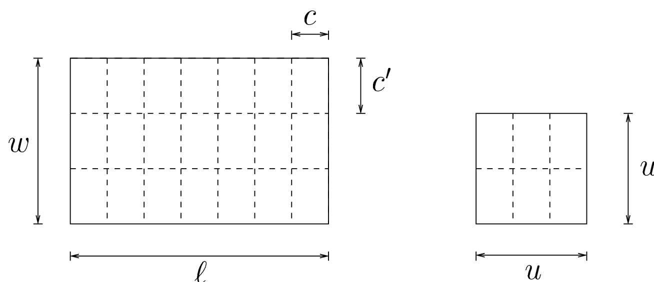
【可公度性】(Commensurability)：对于两个直线段 a, b 若存在一个公尺度 (common yardstick) c 恰能同时整量 a, b，亦即 a, b 都是 c 的整数倍时：$a = m \cdot c, b = n \cdot c$，则称 a, b 为可公度 (commensurable)，而 a, b 的长度比值就定义为分数 $\frac{m}{n}$。另外一个等价的说法就是：若存在适当的整数 m, n 使得 $n \cdot a$ 和 $m \cdot b$ 恰好等长，则称 a, b 为可公度，而这样的 a, b 长度的比值就定义为 $\frac{m}{n}$。

然後他们主观地论断：任何两个直线段总是可公度的，亦即可公度性是普遍成立的 (universal validity of commensurability)。并且以此作为他们当年所致力构筑的定量几何基础论的「头号公理」(Principle Axiom)，亦即以「可公度性的普遍成立」为依据、为基石 (foundation)，给定量几何中的基本定理如矩形面积公式、毕氏定理、相似三角定理给出其证明。大致上，下面所述就是他们当年对于矩形面积公式的证明。

设矩形的长和宽分别是 ℓ 和 w，而 u 则是取定的单位长度。由可公度性普遍成立的「公设」即分别有 $\{\ell, u\}$ 和 $\{w, u\}$ 的公尺度 c, c'，使得它们分别是 c, c' 的整数倍，亦即

$$\begin{aligned} \ell &= m \cdot c, \quad u = n \cdot c \\ w &= p \cdot c', \quad u = q \cdot c' \end{aligned}$$

如 [图 2–4] 所示，$\square(\ell, w)$ 和 $\square(u, u)$ 分别可以用平行线分割成 $m \cdot p$ 和 $n \cdot q$ 个 $\square(c, c')$。



[图 2–4]

由此可见

$$\square(\ell, w) = (m \cdot p)\square(c, c')$$
$$\square(u, u) = (n \cdot q)\square(c, c')$$

所以

$$\begin{aligned}\square(\ell, w) : \square(u, u) &= \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \\ &= (\ell : u) \cdot (w : u)\end{aligned}$$

这也就是矩形的面积等于长乘宽的真正涵意。 □

总之，他们当年基于「可公度性普遍成立」这个「公设」，对于定量平面几何的重要公式如毕氏定理、相似三角形边长比例式等等，都给以严格的证明，建立起洋洋大观的定量平面几何基础论。其中毕氏学派的贡献良多，引以自豪。

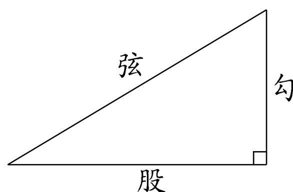
【历史的注记】：假如任何两个直线段真的总是可公度的，则上述证明已经完整无缺地证明了矩形面积公式。但是在毕氏本人百年之後不久，其门徒 Hippasus 却有一个石破天惊的发现，那就是一个正五边形的对角线长和其边长乃是不可公度的！因此当年用来建立定量几何基础论的「头号公设」根本是错误的！亦即可公度性并非普遍成立（随後他也证明了正方形的对角线长和边长也是不可公度的）。由此可见，上述证明只是证明了矩形两个边长 a, b 都是和单位长 u 可公度时这种特殊情形的矩形面积公式，在一般不可公度的情形还得加以补证！

另一点值得在此一提的是上述证明中很关键地用了平行分割，所以矩形面积公式和平行性是必然相关的。当然在三角形内角和恒小于平角的几何中，任何四边形的四个内角和恒小于 2π，所以根本没有四个内角均为直角的四边形。但是「矩形」在那种几何中其实还是有自然的「推广」者，那就是两对对边各别等长而且其两条对角线也等长的那种四边形，它的面积是其两个边长的函数，可是其公式要比 $a \cdot b$ 复杂得多！

在讨论古希腊的几何学家如何克服上述不可公度性的问题之前，我们先来看看定量平面几何学在中国古代是如何建立和处理的。

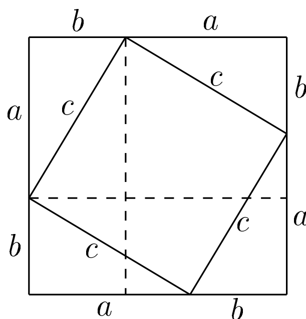
2.3 中国古代的定量几何

大概远在战国时代，定量几何知识乃是以一套简朴实用的测量公式在工匠和水利「工程师」之间流传，如公输般、墨子、西门豹、李冰、李二郎等等很可能就是中国古文明中几何知识的创建者和继承者。在中国古算中，一个直角三角形的两个直角边分别叫做「勾」和「股」，而斜边则叫做「弦」：



[图 2–5]

中国古代几何的独到灼见是善用面积，以矩形面积等于长乘宽为基础，推导直角三角形的面积等于底乘高之半，然後再用下述图解简洁利落地证明了勾股弦公式（或称作勾股定理）和相似直角三角形的比例式。



[图 2–6]

如 [图 2–6] 所示，一个以 $a+b$ 为边长的正方形可以有如实线和虚线所示的两种分割：前者把它分割成一个以 c 为边长的正方形和 4 个以 a, b 为直角边的直角三角形；而後者则它分割成两个以 a, b 为边长的矩形和两个分别以 a, b 为边长的正方形。用以上述两种分割法去计算其总面积，即得下述等式

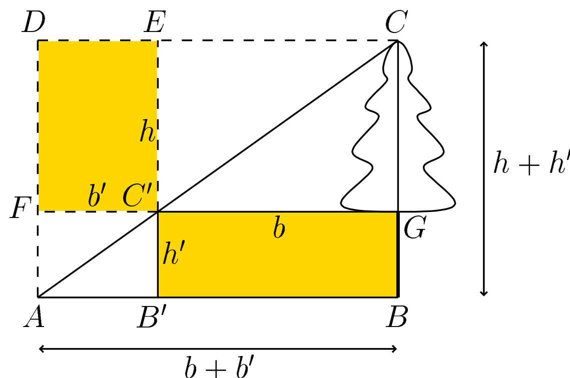
$$c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab=a^2+b^2+2ab$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$$ （亦即勾方加股方等于弦方）

出入相补原理：

在中国的古算测量术中，其所用的基本工具就是上述勾股弦公式和下述出入相补原理。

如 [图 2–7] 所示，在一个给定的矩形的对角线上任取一点 C'，再过 C' 点作平行于两边的直线段（在实际测量中的水平线和垂线），则有：

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC,\ \triangle AB'C' \cong \triangle AFC',\ \triangle C'GC \cong \triangle C'EC$$



[图 2–7]

所以 [图 2–7] 所示的两个矩形面积相等，亦即

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ b \cdot h' &= \square BBGC' = \triangle ABC - \triangle AB'C' - \triangle C'GC \\ &= \triangle ADC - \triangle AFC' - \triangle C'EC = \square FC'ED = b' \cdot h\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} \ \Rightarrow\ \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'}$$

$$\text{亦即}\quad \overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$$

亦即相似直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的对应直角边边长比例式。由它再加上勾股弦公式，就可以推导 $\overline{AC} : \overline{AC'}$ 也等于上述比值。再者，两个一般的相似三角形总可以用垂线分割成两对相似的直角三角形，所以一般的相似三角形定理又可以直截了当地归于相似直角三角形的对应边比例式去推导。

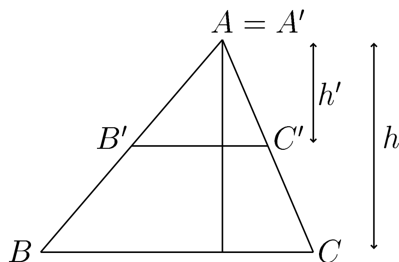
若用现代定量平面几何的知识来分析，上述矩形和直角三角形的面积公式，以及勾股弦和出入相补比例式其实业已构成一组完备的定量平面几何基础。它不但简明扼要，而且用面积公式直截了当地一以贯之。这种处理方式易学好用，至今依然是定量平面几何入门的捷径。

再者，上述讨论也启示我们相似三角形定理本身应该也可以用中国古法，以简简单单的面积计算来加以证明：

【相似三角形定理】：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三个对应角相等，则有其三个对应边边长成比例，即

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \ (=k)$$

证一：如 [图 2–8] 所示，我们不妨设 $A' = A$, $\overline{B'C'} // \overline{BC}$。



[图 2–8]

效法中国古法，我们用两种办法去计算梯形 $⏢BCC'B'$ 的面积：

$$⏢BCC'B' = \triangle ABC - \triangle AB'C' = \frac{1}{2}ah - \frac{1}{2}a'h'$$

$$⏢BCC'B' = \triangle BCC' + \triangle BC'B' = \frac{1}{2}(h-h')(a+a')$$

由两式相减，即得

$$0 = \frac{1}{2}(ah' - a'h) \ \Rightarrow \ \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h'} = \left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{h}{h'}\right) = \left(\frac{a}{a'}\right)^2$$

同理可得 $\triangle ABC : \triangle A'B'C'$ 也等于 $(\frac{b}{b'})^2$ 和 $(\frac{c}{c'})^2$。即

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{c}{c'}\right)^2$$

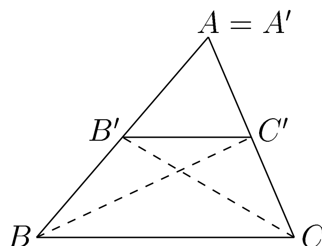
而两个正数的平方相等时，其本身也相等，所以

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

□

证二：如 [图 2–9] 所示，$\triangle BCB'$ 和 $\triangle CC'B'$ 是同底等高的，所以它们的面积相等。因此 $\triangle BC'A$ 和 $\triangle CAB'$ 的面积也相等。再者 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 是同高的，所以

$$\triangle ABC : \triangle ABC' = \overline{AC} : \overline{AC'}$$



[图 2–9]

同理亦有 $\triangle ABC : \triangle AB'C = \overline{AB} : \overline{AB'}$。因为 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle AB'C$ 等面积，所以

$$\overline{AC} : \overline{AC'} = \overline{AB} : \overline{AB'}$$

这也就是我们所要证的相似比例式。 □

2.4 不可公度性的发现与克服—— Hippasus 和 Eudoxus 对于人类理性文明的重大贡献

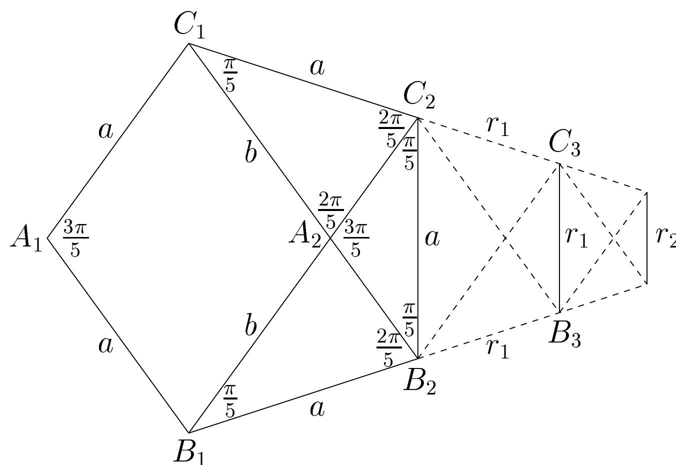
话说当年，毕氏的门徒 Hippasus 对于当年定量几何学的头号公设，亦即「直线段之间可公度性普遍成立」还一直在锲而不舍地钻研。在当年，至少他已认识到下述两个给定的可公度线段 a, b 的最长公尺度的几何求法：

【辗转丈量法】：设 $a < b$，我们用 a 为尺去丈量 b。若恰能整量，即 $b = n_1 a$，则显然 a 本身就是 $\{a, b\}$ 的最长公尺度。不然，$b = n_1 a + r_1$, $r_1 < a$。再用 r_1 为尺丈量 a。若恰能整量，则 r_1 即为 $\{a, b\}$ 的最长公尺度。不然，$a = n_2 r_1 + r_2$。再用 r_2 为尺丈量 r_1，如此辗转丈量，一直到 r_k 恰能整量 r_{k-1} 为止。则 r_k 即为所求的最长公尺度。

【历史的注记】：在 $\{a, b\}$ 可公度的情形，即有 $a = mc, b = nc$。相应于 $\{a, b\}$ 的辗转丈量，即有 $\{m, n\}$ 的辗转相除求最大公因数的算法，而

在 $r_k = d \cdot c$ 式当中，d 就是 m, n 的最大公因数。因为这种辗转相除算法写在欧几里得的 “Elements” 中，所以通常称之为欧氏算法 (Euclidean Algorithm)。但是在古希腊极可能是先有辗转丈量求最长公尺度，因为这是当年学者们钻研的定量几何基本问题。总之由其一自然也就可直接对应而有其另一。所以欧氏算法显然在欧氏的 “Elements” 之前二百年即已为 Hippasus 所知和所用。

话说当年，Hippasus 在沙盘上用芦苇杆画了一个大致如 [图 2–10] 所示的正五边形，然後开始用当时业已熟知的等腰三角形定理和三角形内角和定理来作下述分析，即 (i) 三角形内角和恒等于 π（平角）；和 (ii) 等腰三角形的两底角相等，反之，两底角相等的三角形必为等腰。



[图 2–10]

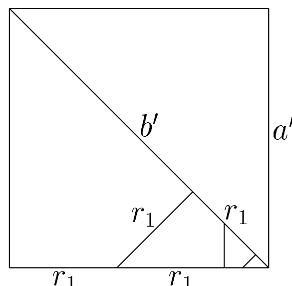
五边形的内角和恒等于 3π，所以上述正五边形 $\pentagon A_1B_1B_2C_2C_1$ 的每个内角都等于 $\frac{3\pi}{5}$。由此可见等腰三角形 $\triangle B_1B_2C_2$ 和 $\triangle B_2C_2C_1$ 的两底角皆为 $\frac{\pi}{5}$。令对角线 $\overline{B_1C_2}$ 和 $\overline{B_2C_1}$ 的交点为 A_2，则有 $\triangle C_1A_2C_2$ 的两底角皆为 $\frac{2\pi}{5}$，而 $\triangle A_2B_2C_2$ 的两底角皆为 $\frac{\pi}{5}$，所以它们都是等腰的。

上述看来不起眼的几何分析却使得 Hippasus 大为震惊！为什麽呢？若以上述五边形的边长 a 去丈量其对角线长 b，则其馀段 r_1 就是等腰 $\triangle A_2B_2C_2$ 的等边边长。若将 $\overline{C_1C_2}$ 延长一段 $\overline{C_2C_3} = r_1$，$\overline{B_1B_2}$ 延长一段 $\overline{B_2B_3} = r_1$，则易证 $\pentagon A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一个正五边形，而它的边长是 r_1，对角线长则是 a。

因此当我们再用 r_1 去丈量 a 时，在本质上又是用一个正五边形的边

长去丈量其对角线长。同理，所得的馀段 r_2 又是一个更小一号的正五边形的边长而其对角线长则为 r_1。如此辗转丈量，每一次所做者在本质上总是用一个正五边形的边长去丈量其对角线长，只是那个正五边形逐次缩小吧了。这样就理论上证明了 $\{a,b\}$ 的辗转丈量必然是永无止休的！因此 $\{a,b\}$ 必然是不可公度的 (non-commensurable)！此事焉能叫他不吃惊!?这个惊人的发现事实胜于雄辩地证明了当年定量几何基础论的头号基石——「可公度性的普遍成立」其实根本是一个错误的「公设」！

Hippasus 接著还用下述图解证明正方形的边长和对角线长 $\{a',b'\}$ 之间的辗转丈量也是永无止休的，所以也是不可公度的。



[图 2–11]

由 [图 2–11] 可以看出 $\{a',b'\}$ 的辗转丈量所得的逐步算式是

$$\begin{aligned} b' &= a' + r_1 \\ a' &= 2r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2r_2 + r_3 \end{aligned}$$

....

往後的表式总是一样的

$$r_{k-1} = 2r_k + r_{k+1}$$

所以是永无止休的。[细节的证明留作习题]

【历史的注记】：Hippasus 的伟大发现，是人类理性文明的重要里程碑，有如发现了一个理念上的新大陆，它不单对于定量几何学有根本的重要性，其实对于整个自然科学都有深远的影响。但是当年古希腊几何学界，特别是 Hippasus 本人所在的毕氏学派对于这个伟大发现的反应，却是全然无理性的。据某些现在已不可详考的记载，Hippasus 反而因为这个重大发现而丧生于同门之手。

其实，不可公度性的存在，并不是全面否定了当年古希腊几何学在定量几何基础论上的成就。它只是说原本以为已经完整无缺的证明其实只是在可公度的情形的证明，而在一般不可公度的情形，则尚有待补证！这个亟待补证的任务对于当年整个古希腊几何学界是一个严峻而且迫切的挑战。大约经历半个世纪的努力，才促使 Eudoxus 开创了影响无比深远广阔的逼近法和逼近原理而得以完美成功。可以这麽说，Eudoxus 的思想和方法提供了研讨和理解 Hippasus 所发现的新大陆的基础。

Eudoxus 的逼近法和逼近原理：
(Method and Eudoxus principle of approximation)

当 $\{a,b\}$ 不可公度时，「$a:b$」不是一个分数。它是一种有待理解的新兴事物，不管你如何称呼它，反正是一种当时尚未了解有待研究的「新量」。例如 $\{a,b\}$ 和 $\{a',b'\}$ 是两对不可公度的直线段，Eudoxus 认识到「$a:b$」和「$a':b'$」这两个「新量」之间的大小或相等关系都还有待定义！但是当 $\{a,b\}$ 不可公度而 $\{a',b'\}$ 可公度的情形下：

$$a:b \text{ 和 } a':b'=\frac{m}{n}$$

它们之间的大小关系却又是相当清楚的，亦即：

$$a:b\begin{cases} >\dfrac{m}{n} \\ \\ <\dfrac{m}{n}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ 比 } \dfrac{m}{n}\cdot b \text{ 长} \\ \\ a \text{ 比 } \dfrac{m}{n}\cdot b \text{ 短}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b \\ n\cdot a < m\cdot b\end{cases}$$

这也就是 Eudoxus 在研究这种「新量」时第一个认识到的：

Eudoxus 比较原则：

$$a:b\begin{cases} >\dfrac{m}{n} \\ \\ <\dfrac{m}{n}\end{cases} \quad \text{的充要条件就是} \quad \begin{cases} n\cdot a > m\cdot b \\ n\cdot a < m\cdot b\end{cases}$$

亦即 $a:b$ 和 $\frac{m}{n}$ 的比较大小可以由 $n\cdot a$ 和 $m\cdot b$ 之间的比较长短而判定之。而後者是极为初等而且其几何意义乃是一目了然的。

在 $\{a:b\}$ 和 $\{a':b'\}$ 都是不可公度的情形，若有分数 $\frac{m}{n}$ 使得

$$a:b > \frac{m}{n} > a':b' \quad \text{亦即} \quad 「\; na > mb \quad \text{但是} \quad na' < mb' 」$$

则显然应该定义前者大于後者。反之，若有分数 $\frac{m}{n}$ 使得 $a:b < \frac{m}{n} < a':b'$ ，则应该定义前者小于後者。

再者，假如这种间于 $a:b$ 和 $a':b'$ 之间的分数是不存在的情形，亦即对于任何分数 $\frac{m}{n}$, $a:b$ 和 $a':b'$ 与 $\frac{m}{n}$ 之间的大小关系总是同步同样的，理当就可以作为「$a:b=a':b'$」的定义。

这也就是 Eudoxus 当年对于两个不可公度的比值之间的大、小及相等关系的定义，即

【定义】：$a:b > a':b' \Leftrightarrow$ 存在分数 $\dfrac{m}{n}$ 使得 $a:b > \dfrac{m}{n} > a':b'$

$$a:b < a':b' \Leftrightarrow \text{存在分数 } \frac{m}{n} \text{ 使得 } a:b < \frac{m}{n} < a':b'$$

$$a:b = a':b' \Leftrightarrow \text{对于任何分数 } \frac{m}{n} \text{ 皆有相同的大小关系。}$$

$$\text{亦即：} \quad na \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} mb \Leftrightarrow na' \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} mb'$$

为了论证上述定义的必然性，Eudoxus 开创了影响极为深远的逼近法 (Method of Approximation)。首先，他提出下述直观上极为明显的「公设」作为其论证的依据：

> 任给两个直线段 a,b，不论前者有多短而後者有多长，总有足够大的整数 N 使得 $N\cdot a$ 比 b 长。

【定理】：设 $\{a,b\}$ 是不可公度者，对于任给正整数 n，恒存在 m 使得

$$\frac{m}{n} < a:b < \frac{m+1}{n}$$

证明：由上述公设，必有足够大的 N 使得 $\frac{1}{n}b$ 的 N 倍要比 a 长。令 $m+1$ 为这种 N 之中的最小者，则有

$$m(\frac{1}{n}b) < a < (m+1)(\frac{1}{n}b)$$

亦即

$$\frac{m}{n} < a:b < \frac{m+1}{n} \qquad \square$$

[注]：因为 n 是可以任意大的，所以上述左、右夹逼 $a:b$ 的两个分数之间的差额 $\frac{1}{n}$ 是可以<u>小到任意小的</u>。[用现代的术语，即对于任给正数 $\varepsilon > 0$，皆有足够大的 n 使得 $\frac{1}{n} < \varepsilon$。] 所以 $a:b$ 和 $\frac{m}{n}$ 或 $\frac{m+1}{n}$ 之间的差别当然也可以小到任意小。基于上述定理，就可以进一步说明前述不可公度的「比值」之间大、小、相等关系的定义的<u>必然性</u>：

设 $a:b$ 和 $a':b'$ 对于任给分数恒具有相同的大小关系，则对于任给 n，都有相应的 m，使得

$$\frac{m}{n} < a:b,\ a':b' < \frac{m+1}{n}$$

因此 $a:b$ 和 $a':b'$ 之间的差别要比所有 $\frac{1}{n}$ 都小。不论上述差别是那一种新量，它是一个<u>固定的量</u>而它又比所有 $\frac{1}{n}$ 都小，所以唯一的可能者就是零，亦即 $a:b = a':b'$。再者，在 $a:b$ 和 $a':b'$ 不等的情形，则有一个分数，它和两者的大小关系是不同的，这也就是前述比较大小的定义。

有了上述思想和逼近法，再进而重建当年希腊的定量几何学，乃是顺理成章之事，其要点在于原先仅仅对于可公度的情形具有证明的各种各样定理和公式，作出其在不可公度的情形的「补证」。例如下述矩形公式：

$$\square(a,b) : \square(u,u) = (a:u)(b:u)$$

在 $a:u$ 和 $b:u$ 都是分数时业已证明，而在 $a:u$ 和 $b:u$ 至少有一个不是分数（亦即不可公度）时，需要补证。

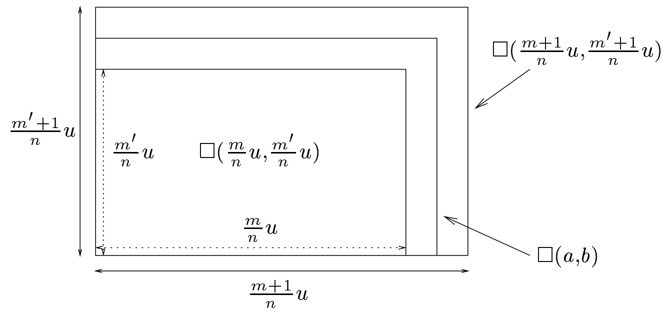
Eudoxus 对于上述矩形面积公式所作的补证，大致如下：

对于任给正整数 n，不论它有多大，皆有 m 和 m' 使得

$$\frac{m}{n} < a:u < \frac{m+1}{n},\ \frac{m'}{n} < b:u < \frac{m'+1}{n}$$

亦即

$$\frac{m}{n}u < a < \frac{m+1}{n}u,\ \frac{m'}{n}u < b < \frac{m'+1}{n}u$$



[图 2–12]

如 [图 2–12] 所示，$\square(a,b)$ 包含 $\square(\frac{m}{n}u, \frac{m'}{n}u)$，而且它又包含于 $\square(\frac{m+1}{n}u, \frac{m'+1}{n}u)$ 之中，由此可得

$$\frac{mm'}{n^2} < \square(a,b) : \square(u,u) < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}.$$

再者，由前述不等式的相乘，亦有

$$\frac{mm'}{n^2} < (a:u)(b:u) < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$$

因此，$\square(a,b) : \square(u,u)$ 和 $(a:u)(b:u)$ 之间的差别（假如有的话）必然要比同时左、右夹逼两者的两个分数之间的差别要更小，即小于

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2} - \frac{mm'}{n^2} = \frac{m+m'+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'+1}{n}\right)$$

在 n 无限增大时，它是可以小到任意小的。所以 $\square(a,b) : \square(u,u)$ 和 $(a:u)(b:u)$ 之间不可能有任何差别，亦即所要补证的矩形面积公式

$$\square(a,b) : \square(u,u) = (a:u)(b:u)$$ □

长话短说，Eudoxus 所创的逼近法不但把当年仅仅在可公度的特殊情形下具有其证明的各种各样定理和公式，加以明确简洁的「补证」，使得它们不论在可公度或不可公度的情形皆普遍成立，从而彻底重建了定量几何基础论。再者，他有鉴于曾经采用错误的「公设」作为几何学的论证依据的惨痛教训，决心下功夫彻底检查当代的几何学，尽其所知所能把其论证的依据，精简压缩到「至精至简」；流传至今的《欧氏几何学》 (Euclidean Geometry) 其中绝大部分来自 Eudoxus 的

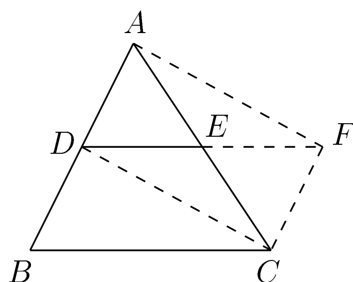
著作。所以「公理化」治学的典范和人类理性文明中的第一科学的初阶集其大成，实乃 Eudoxus（而并非 Euclid）的伟大贡献。不但此也，Eudoxus 的逼近原理和方法论不但重建了定量几何基础论，而且也是分析学 (Analysis) 的发祥地和基本方法。他本人就把它用来证明锥体体积等于三分之一底面积乘高这个立体几何基本公式，他的证法以及随後 Archimedes 把它拓展到球面面积公式和球体体积公式的论证乃是积分学的雏形和范例。

如今回顾反思，将中、西古文明的定量平面几何作一比较分析：两者所得的基本公式大致相同，亦即矩形、三角形的面积公式，勾股弦公式（亦即毕氏定理）和相似三角形的边长比例式，但是在基调和格局上则两者是迥然不同的。中国古代的工程师研讨几何是为了致用，是唯用是尚的；他们在基本测量公式的推导上善用面积，的确有其独到的长处，但是在对于空间本质理解的深度上，比之于古希腊几何学是的确瞠乎其後的了。究其原因，相信并非是在聪明才智上有任何差别，而是在格调、志趣和气概上有所分野！例如「可公度性」乃是一个纯理论性的问题；在实用的度量中，在力所能及的准确度之下的微量根本没有其实质意义，所以不存在可不可公度这种问题。由此可见，在唯用是尚的格局下，根本是不会有此一问的，当然也不会有 Hippasus 这种深深触及空间的连续性的发现和历经半世纪的奋斗才结晶而得出的 Eudoxus 逼近原理和方法论，是不？由此反思，同学们应该体认到局限中国古代几何的发展因素乃是：「唯用是尚，则难见精深，所及不远」；而古希腊几何学上的成功给全人类的启示与鼓舞则是：「若以理解大自然为志趣，并能世代相承、精益求精，则宇宙基本结构的至精至简、至善至美是可望可及的」。

2.5 例题和习题

【例题】：

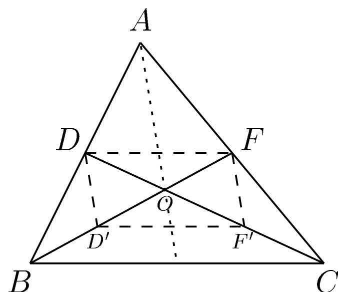
(1) 令 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 两边 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 的中点，试证 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 而且 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$。



[图 2–13]

证明：如 [图 2–13] 所示，延长 $\overline{DE}$ 至 $\overline{DF}$ 使得 $\overline{EF}=\overline{DE}$，则 E 点平分 $\overline{DF}$ 和 $\overline{AC}$，所以 $\square ADCF$ 乃是一个平行四边形。由此可得 $\overline{FC}$ 与 $\overline{AD}$ 为平行等长，即 $\overline{FC}$ 与 $\overline{DB}$ 也为平行等长，因此 $\square BCFD$ 亦是一个平行四边形。所以 $\overline{DF}$ 与 $\overline{BC}$ 为平行等长，即得所求证。

(2) 试证 $\triangle ABC$ 的三条中线共交于一点（称之为重心），而该点把每条中线均分成 $2:1$ 的两段。



[图 2–14]

证明：令中线 $\overline{BF}$ 和 $\overline{CD}$ 之交点为 O。取 D', F' 分别为 $\overline{OB}$ 和 $\overline{OC}$ 之中点，则有（见例题 (1) ）：

$$\overline{D'F'}=\frac{1}{2}\overline{BC} \quad \text{而且} \quad \overline{D'F'}//\overline{BC}$$

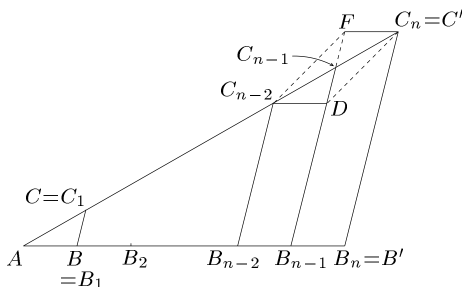
所以 $\overline{D'F'}$ 与 $\overline{DF}$ 为平行等长，即 $\square D'F'FD$ 是一个平行四边形。所以

$$\overline{DO}=\overline{OF'}, \quad \overline{D'O}=\overline{OF}$$

即得所求证。

(3) 相似三角形定理在整数比时的古希腊证法：

如 [图 2–15] 所示，$B'C'$ 是分别位于 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的延长线上之点，满足 $\overline{AB'} = n\overline{AB}$, $B'C'//BC$, n 为正整数。试证 $\overline{AC'} = n\overline{AC}$, $\overline{B'C'} = n\overline{BC}$。



[图 2–15]

归纳证明：当 $n = 1$ 时结果是显然的。当 $n = 2$ 时乃是例题 (1) 之所证。兹对于 $n \geq 3$ 时作归纳证明如下：

以 $\overline{AB}$ 之长度等分 $\overline{AB'}$ 为 n 段，令其等分点为

$$B = B_1,\ B_2,\ \ldots\ , B_{n-2},\ B_{n-1},\ B' = B_n$$

过 B_{n-2} 及 B_{n-1} 作两条平行于 BC 的直线

$$B_{n-2}C_{n-2}//BC, \quad B_{n-1}C_{n-1}//BC$$

其中 C_{n-2} 及 C_{n-1} 为 AC' 上两点；再过 C_{n-2} 及 C' 作两条平行于 AB 的直线

$$C_{n-2}D//AB, \quad FC'//AB$$

其中 D 及 F 为 $B_{n-1}C_{n-1}$ 上两点，如 [图 2–15] 所示。

由所作易见 $\square B_{n-2}B_{n-1}DC_{n-2}$ 和 $\square B_{n-1}B'C'F$ 都是平行四边形，所以

$\overline{C_{n-2}D}$ 与 $\overline{B_{n-2}B_{n-1}}$ 为平行等长，
$\overline{FC'}$ 与 $\overline{B_{n-1}B'}$ 为平行等长；

由所作亦有 $\overline{B_{n-2}B_{n-1}} = \overline{B_{n-1}B'}$，所以 $\overline{C_{n-2}D}$ 与 $\overline{FC'}$ 也为平行等长，即 $\square C_{n-2}DC'F$ 亦是平行四边形。因为平行四边形的两条对

角线互相平分，所以

$$\begin{aligned}\overline{C_{n-1}C'} &= \overline{C_{n-2}C_{n-1}}, \quad \text{和}\\ \overline{C_{n-1}F} &= \overline{DC_{n-1}}\end{aligned}$$

现用归纳假设可得

$$\begin{aligned}\overline{AC_{n-2}} &= (n-2)\overline{AC}, \qquad \overline{B_{n-2}C_{n-2}} = (n-2)\overline{BC}\\ \overline{AC_{n-1}} &= (n-1)\overline{AC}, \qquad \overline{B_{n-1}C_{n-1}} = (n-1)\overline{BC}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{C_{n-2}C_{n-1}} &= \overline{AC_{n-1}} - \overline{AC_{n-2}} = (n-1)\overline{AC} - (n-2)\overline{AC} = \overline{AC}\\ \overline{DC_{n-1}} &= \overline{B_{n-1}C_{n-1}} - \overline{B_{n-1}D} = \overline{B_{n-1}C_{n-1}} - \overline{B_{n-2}C_{n-2}}\\ &= (n-1)\overline{BC} - (n-2)\overline{BC} = \overline{BC}\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}\overline{AC'} &= \overline{AC_{n-1}} + \overline{C_{n-1}C'} = \overline{AC_{n-1}} + \overline{C_{n-2}C_{n-1}}\\ &= (n-1)\overline{AC} + \overline{AC} = n\overline{AC}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\overline{B'C'} &= \overline{B_{n-1}F} = \overline{B_{n-1}C_{n-1}} + \overline{C_{n-1}F}\\ &= (n-1)\overline{BC} + \overline{DC_{n-1}} = (n-1)\overline{BC} + \overline{BC} = n\overline{AC}\end{aligned}$$

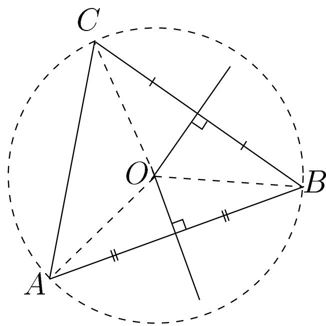
定理证毕。

(4) 外接圆作图：对于一个给定的 $\triangle ABC$，唯一存在一个过其三顶点的圆，称之为 $\triangle ABC$ 的外接圆（如 [图 2–16] 所示）。其作图法如下：用[基本作图 1.3]，分别作 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的垂直平分线。则两线的交点 O 乃是具有和三顶点等距，即

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

的唯一之点，所以它就是所求作的外心（外接圆圆心）。

[注]：$\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的垂直平分线只有在 A, B, C 三点共线时才不相交。

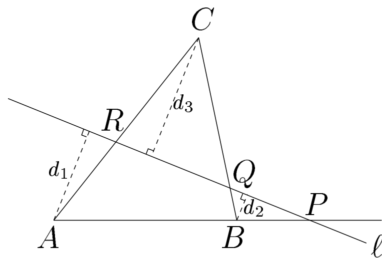


[图 2–16]

(5) 试证 Menelous 定理：设直线 ℓ 与 $\triangle ABC$ 三边所在之直线 AB, BC 和 CA 分别相交于 P, Q, R（相异）三点，则下述有向长度比乘积条件式恒成立：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1$$

[Menelous 逆定理亦成立。证明留作习题。]



[图 2–17]

证明：令 d_1, d_2, d_3 分别是顶点 A, B, C 到直线 ℓ 之垂直距离，则由相似三角形定理可得

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{d_2}{d_3}, \quad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = \frac{d_3}{d_1}$$

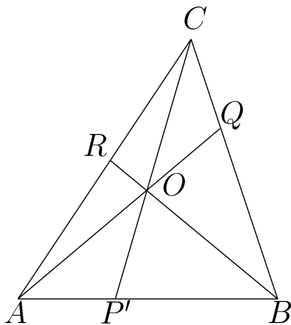
所以

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} \equiv -1$$

(6) 试证 Ceva 定理：设 O 为 $\triangle ABC$ 内部一点，P', Q, R 分别为 AB 与 CO, BC 与 AO, CA 与 BO 之交点，则下述有向长度比乘积条件式恒成立：

$$\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$

[Ceva 逆定理亦成立。证明留作习题。]



[图 2–18]

证明：令 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ 的面积分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$。因为 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CPB$ 同高，所以其面积之比等于其底边边长之比，亦即

$$\frac{\triangle CAP}{\triangle CPB} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$$

同理

$$\frac{\triangle OAP}{\triangle OPB} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$$

所以

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\triangle OAC}{\triangle OBC} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$$

类似地可得

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}$$

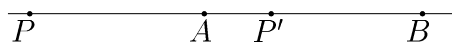
将三式相乘即为所求证。

【定义】：在直线上之四点列 P, A, P', B 称之为调和点列，记以

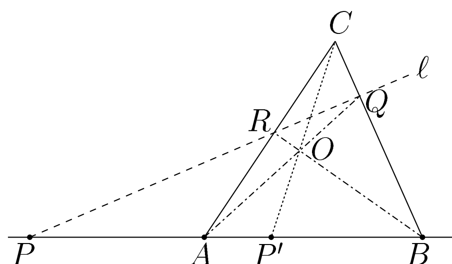
$(PP';AB)=-1$，若满足下述有向长度比的条件式：

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}}=-\frac{\overrightarrow{P'A}}{\overrightarrow{P'B}}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'A}}=-1$$

亦即 P, P' 两点以同等比例分割线段 $\overline{AB}$（一在外、一在内）。



(7) 调和点列作图法：对给定已共线三点 P, A, B，求作 P' 点使得 P, A, P', B 成调和点列。



[图 2–19]

[作法] 用已给线段 $\overline{AB}$ 为一边，任选线外一点 C 构作三角形 $\triangle ABC$。过 P 点作任意的直线 ℓ，使得 ℓ 与 $\overline{BC}, \overline{CA}$ 分别交于 Q, R 两点。连结 AQ, BR，设两者相交于 O 点，则 CO 与 $\overline{AB}$ 就会交于所求作之 P' 点。

证明：直接运用 Menelous 定理和 Ceva 定理！

$$\text{Menelous 定理：}\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1$$

$$\text{Ceva 定理：}\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1$$

两式相除即得所需的有向长度比例式。

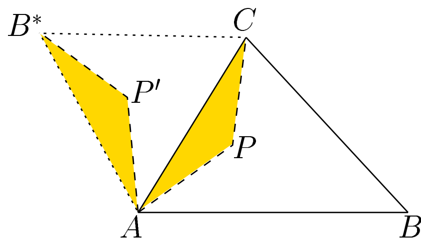
(8) Steiner 点：设 $\triangle ABC$ 的三内角皆小于 120°（即小于 $\frac{2\pi}{3}$），则

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$$

有一个唯一的极小值，其解点 P_0 乃是使得

$$\angle AP_0B = \angle BP_0C = \angle CP_0A = 120^\circ$$

之点。



[图 2–20]

如[图 2–20]所示，作 B^* 使得 $\triangle ACB^*$ 为等边三角形。设 P 是平面上任给一点，令 $\triangle AP'B^*$ 为 $\triangle APC$ 绕 A 点旋转 60° 之所得者，则有 $\triangle APP'$ 为等边三角形，而且

$$\overline{CP} + \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{B^*P'} + \overline{P'P} + \overline{PB}$$

由此可见，上述总长在 P, P' 皆位于 $\overline{BB^*}$ 之上为极小。类似地定义 A^* 和 C^* 点，则 P_0 应该就是 $\overline{AA^*}, \overline{BB^*}, \overline{CC^*}$ 的共交点，而所求证者则显而易见了。

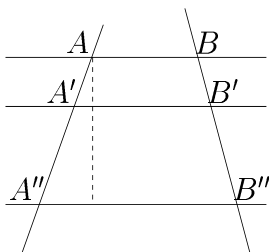
【习题】：

(1) 以矩形面积公式为基础，试证：平行四边形面积 = 底乘高。

(2) 试证三角形面积公式为 $A(\triangle) = \frac{1}{2}bh$。

(3) 试证平行线的截割保持线段之比；即如 [图 2–21] 所示，求证：

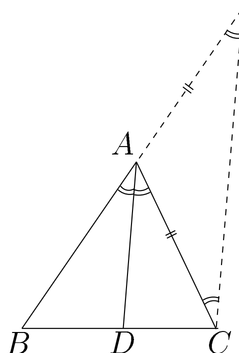
$$\text{当} \quad AB /\!/ A'B' /\!/ A''B'', \quad \text{则} \quad \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'B''}}$$



[图 2–21]

(4) 如 [图 2–22] 所示，AD 乃是 $\angle A$ 的分角线。试证

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



[图 2–22]

(5) 试将一个给定线段 $\overline{AB}$ 等分为 n 段，n 为某一正整数。

(6) 试证明相似三角形定理在分数比的情形。

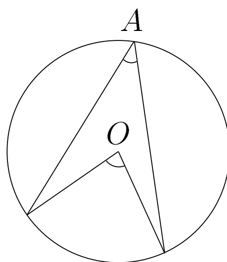
(7) 试证 Menelous 逆定理：设（相异）三点 P, Q, R 分别在 $\triangle ABC$ 三边 AB, BC, CA 之上并满足下述有向长度比的条件式，则 P, Q, R 三点共线。

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1$$

(8) 试证 Ceva 逆定理：设 P', Q, R 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上的三点并满足下述有向长度比的条件式，则 CP', AQ, BR 三线共点。

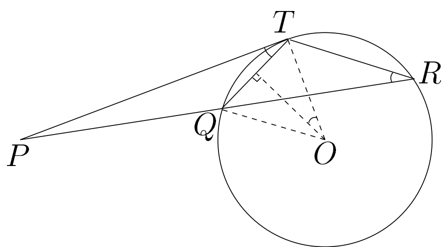
$$\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$

(9) 试证圆心角为圆周角之两倍：$\angle O = 2\angle A$。



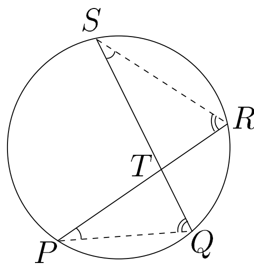
[图 2–23]

(10) 在 [图 2–24] 中，PQR 为一直线，PT 与圆相切于 T 点。试证：$\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=\overline{PT}^2$。



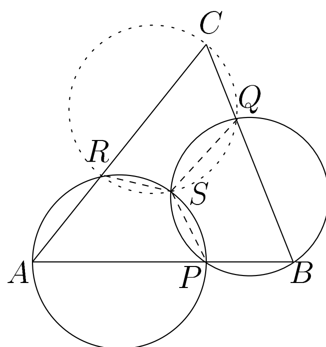
[图 2–24]

(11) 设 P, Q, R, S 为圆上四点，而 $\overline{PR}$ 与 $\overline{QS}$ 则相交于圆内（或圆外）T 点。试证：$\overline{PT}\cdot\overline{TR}=\overline{QT}\cdot\overline{TS}$。



[图 2–25]

(12) 试证 Miquel 定理：在 $\triangle ABC$ 的三边 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上分别取三点 P, Q, R，过 P, B, Q 及 P, R, A 分别作圆，令两圆交点为 S（与 P），则 S, Q, C, R 四点共圆。



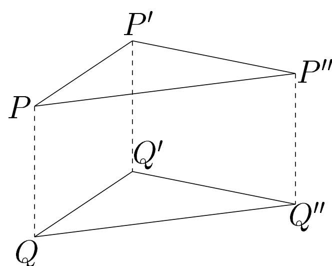
[图 2–26]

(13) 若平面中的一个变换 τ 满足条件

$$\overrightarrow{P\,\tau(P)} \text{ 和 } \overrightarrow{Q\,\tau(Q)} \quad \text{恒为同向平行且等长}$$

则称 τ 为平面上一个平移 (translation)。试证平移之组合仍是平移，即验证：

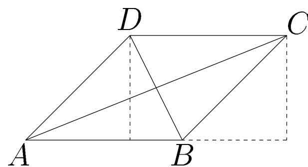
若	$\overrightarrow{PP'}$ 和 $\overrightarrow{QQ'}$	为同向平行且等长，
和	$\overrightarrow{P'P''}$ 和 $\overrightarrow{Q'Q''}$	为同向平行且等长；
则必有	$\overrightarrow{PP''}$ 和 $\overrightarrow{QQ''}$	亦为同向平行且等长。



[图 2–27]

(18) 试证<u>广义勾股定理</u>：设 $\overline{AB}$ 与 $\overline{CD}$ 为平行等长，则：

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2$$



[图 2–28]

第 三 章

圆与三角学

在各种各样的平面形之中，圆是最为完美对称者，而三角形则是最为简单者。所以在平面几何的研讨中，圆和三角形理所当然地是其精要之所在。例如定量平面几何中的基本定理，首推三角形的面积公式、相似三角形定理和勾股定理，即

- 面积公式：三角形面积 $= \frac{1}{2}$ 底 $\times$ 高
- 相似三角形定理：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三内角对应相等，则其三对对应边成比例，即

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \quad (k：相似比)$$

- 勾股定理：直角三角形的边长满足

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \quad （亦即毕氏定理）$$

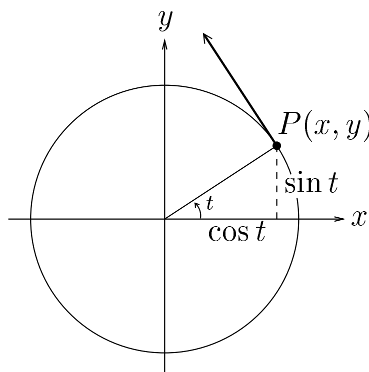
（勾方加股方等于弦方）

本章将以上述三者为基础，研讨圆与三角形的解析几何，其所得之基础理论也就是三角函数的基本性质和三角定律。正弦、馀弦函数是一对起源于圆周运动，密切配合的周期函数，它们是解析几何学和周期函数的分析学中最为基本和重要的函数；而正弦、馀弦函数的基本性质乃是圆的几何性质（主要是其对称性）的直接反映。

三角学 (Trigonometry) 所讨论的课题是三角形的各种各样几何量之间的函数关联。由此可见，三角学其实就是三角形的解析几何，可以说是具体而微的解析几何；它是整个平面解析几何的基础所在，也是用解析法系统研究几何的基本公具。

3.1 正弦、馀弦函数的基本性质

如 [图 3–1] 所示，设 $P(x,y)$ 是在单位圆上，以 $(1,0)$ 为起点作逆时钟方向的单位速率运动的动点，则它的 x, y 坐标乃是时间 t 的函数，分别定义为馀弦函数 $\cos t$ 和正弦函数 $\sin t$。



[图 3–1]

其实，$x = \cos t$ 和 $y = \sin t$ 乃是单位圆的自然的动态（解析）描述。由此可以想到，正弦、馀弦函数的基本性质乃是圆的几何性质（主要是对称性）的解析表述。例如

1. $\overline{OP}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ （勾股定理）

2. 圆周周长 $= 2\pi \Leftrightarrow$ 周期性：

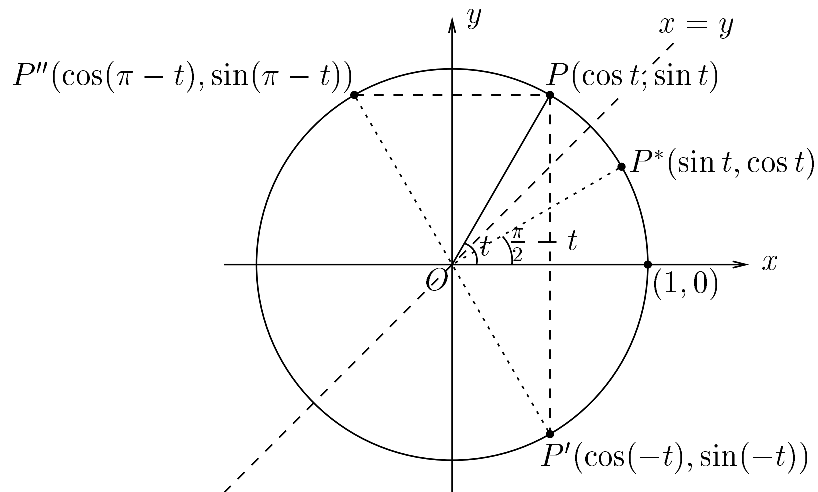
$$\begin{cases} \cos(2\pi + t) = \cos t \\ \sin(2\pi + t) = \sin t \end{cases} \tag{3.1}$$

3. 对于 x–轴（或 y–轴）的反射对称性（参看 [图 3–2]）

$$\Leftrightarrow \quad \begin{gathered} \cos(-t) = \cos t, \quad \sin(-t) = -\sin t \\ \big(\cos(\pi - t) = -\cos t, \quad \sin(\pi - t) = \sin t\big) \end{gathered} \tag{3.2}$$

4. 对于直线 $x=y$ 的反射对称性（参看 [图 3–2]）：$(x,y)\leftrightarrow(y,x)$

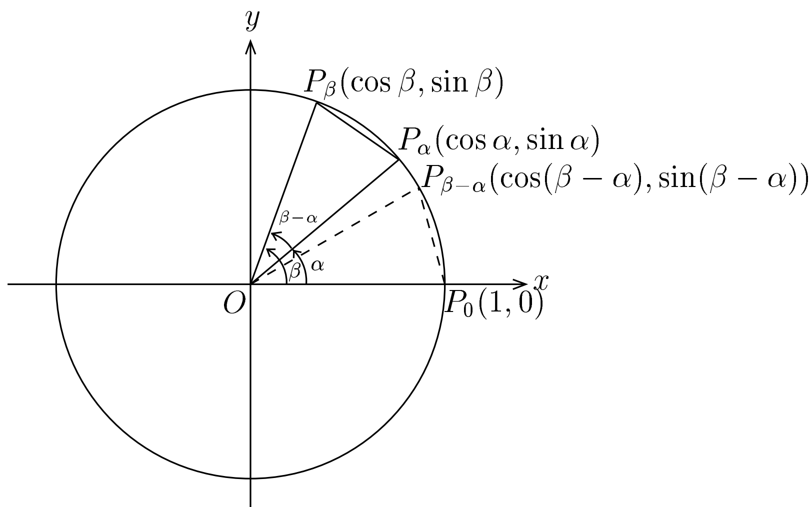
$$\Leftrightarrow \quad \sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t, \quad \cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t \tag{3.3}$$



[图 3–2]

5. 圆的旋转对称性 $\Leftrightarrow$ 复角公式：

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha \tag{3.4}$$



[图 3–3]

如 [图 3–3] 所示，$\triangle OP_\alpha P_\beta$ 乃是 $\triangle OP_0P_{\beta-\alpha}$ 旋转 α 角之所得，所以当然有 $\overline{P_\alpha P_\beta}^2 = \overline{P_0P_{\beta-\alpha}}^2$，即有

$$(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 = \big(\cos(\beta-\alpha) - 1\big)^2 + \sin^2(\beta-\alpha)$$

亦即

$$\begin{aligned} &\cos^2\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) \\ &= \cos^2(\beta-\alpha) + \sin^2(\beta-\alpha) + 1 - 2\cos(\beta-\alpha) \\ \Rightarrow\ &\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha \end{aligned} \tag{3.5}$$

把 (3.4)–式和 (3.2)–式结合，即得

$$\begin{aligned} \cos(\beta+\alpha) &= \cos(\beta-(-\alpha)) \\ &= \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

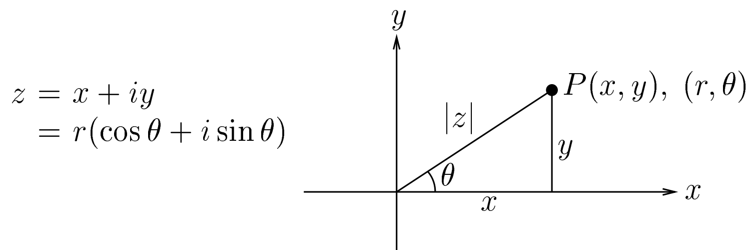
再把 (3.6)–式和 (3.3)–式相结合，即得

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \cos[(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)-\beta] \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.7}$$

我们还可以把 (3.6)–式和 (3.7)–式用复数的乘法组合成下述更加整齐的复值形式，即

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \tag{3.8}$$

再者，我们可以把 $z = x + iy$ 想为平面上 $P(x, y)$ 点的复数坐标 (complex coordinate)。如 [图 3–4] 所示，P 点的极坐标 $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2+y^2}$ 和 θ 分别就是 z 的绝对值和幅角。



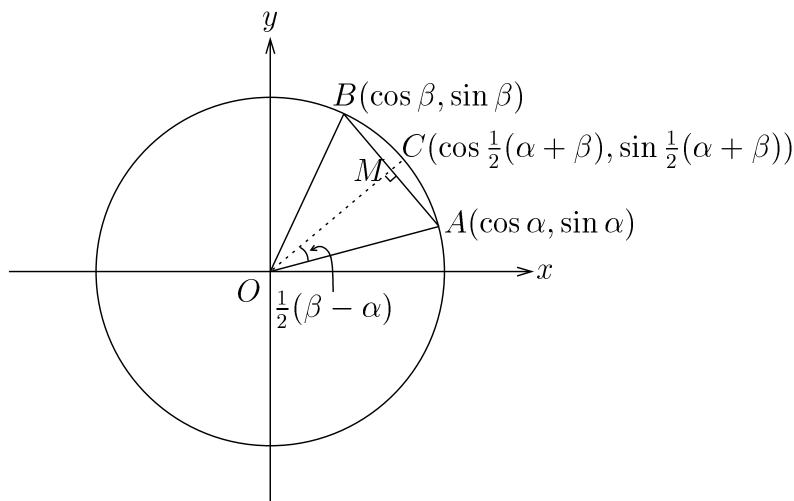
[图 3–4]

将 (3.8)–式用来表达复数的乘法，即有

$$
z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \tag{3.9}
$$

亦即两个复数 z_1, z_2 相乘，其绝对值相乘而其幅角则相加。此事在研讨复数时具有基本的重要性。

6. 和化积公式和反射对称性



[图 3–5]

如 [图 3–5] 所示，等腰三角形 $\triangle OAB$ 对于 OM 成反射对称。所以 $\angle AOM = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$, $\angle xOC = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。即有

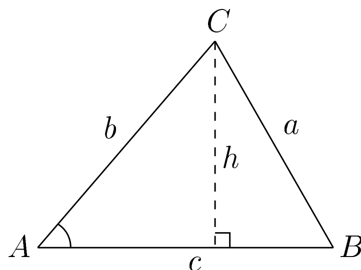
$$
\begin{aligned}
M &= (\tfrac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta), \tfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)) \\
C &= (\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)) \\
\overline{OM} &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta) = \cos\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta) = \cos\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \end{cases} \tag{3.11}
$$

3.2 三角定律

一个三角形 $\triangle ABC$ 含有各种各样的几何量，例如它的三边边长、三个内角的角度、面积、外径（外接圆的半径）和内径（内切圆的半径）等等。而它们之间，又存在著各种各样的函数关系。本节所要研讨者，乃是它们之间的基本函数关系，通称之为三角定律。

1. 三角形面积公式与正弦定律



[图 3–6]

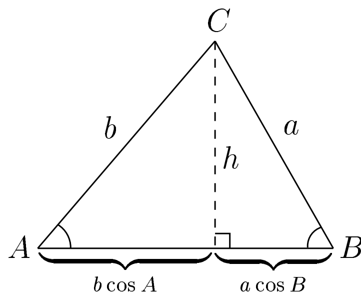
如 [图 3–6] 所示，我们将以 a, b, c 分别表示角 A, B, C 的对边边长，$\triangle$ 表示其面积。易见 $h = b\sin A$，所以

$$\triangle = \frac{1}{2}c \cdot h = \frac{1}{2}bc\sin A \tag{3.12}$$

同理：$\triangle = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$。由此即得下述正弦定律：

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2\triangle}{abc} \tag{3.13}$$

2. 垂直投影与馀弦定律



[图 3–7]

由 [图 3–7] 和 Cosine 的定义，即有

$$\text{同理：}\quad \left.\begin{aligned} b\cos A + a\cos B &= c \\ c\cos B + b\cos C &= a \\ a\cos C + c\cos A &= b \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

由上述 $\{\cos A, \cos B, \cos C\}$ 的线性方程组即可解得

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases} \quad \text{（馀弦定律）} \tag{3.14$'$}$$

[注]：S.S.S. 叠合条件的几何意义是 $\triangle ABC$ 的三边边长业已唯一地确定了它的三个内角。换句话说，其三个内角分别是它的三边边长的函数。上述馀弦定律给出了它们的具体表达式，亦即

$$A = \cos^{-1}\left\{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}, \quad \text{等等}$$

同样的，三角形的一组叠合条件如 S.A.S., A.S.A. 的几何意义其实也就是三角形的其他变量都可以用这样所给的一组自变元加以表达。[参看习题 (8) 和 (9)。]

3. <u>正弦定律之第二证法</u>

我们也可以用馀弦定律来推导正弦定律，即

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 A}{a^2} &= \frac{1-\cos^2 A}{a^2} \\ &= \frac{1}{4a^2b^2c^2}\left\{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4a^2b^2c^2}\left\{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)\right\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

因为上式右侧是 a, b, c 的对称式，所以

$$\frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2} = \frac{\sin^2 A}{a^2} \tag{3.16}$$

而 $\frac{\sin A}{a}, \frac{\sin B}{b}, \frac{\sin C}{c}$ 都是恒正的，所以由 (3.15)–式和 (3.16)–式可以推论

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\{2\sum a^2b^2 - \sum a^4\}^{\frac{1}{2}}}{2abc} \tag{3.16'}$$

其中 $\sum a^2b^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, $\sum a^4 = a^4 + b^4 + c^4$ 乃是常用的简约写法。再将 (3.16′)–式和 (3.13)–式相对比，即得

$$16\triangle^2 = 2\sum a^2b^2 - \sum a^4 \tag{3.17}$$

其实，上式之右侧是可以分解成四个一次因式的乘积者，而且此事可以从一个简单的几何常识推论而知，亦即三角形的三边边长中，若有其一为其他两者之和，则其面积为零。亦即

$$\begin{aligned} & a+b-c=0 \quad \text{或} \quad a-b+c=0 \quad \text{或} \quad -a+b+c=0 \\ \Rightarrow \quad & 2\sum a^2b^2 - \sum a^4 = 0 \end{aligned}$$

将上述事实和馀式定理相结合，即可推论它含有因式

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

至此即可直接验证

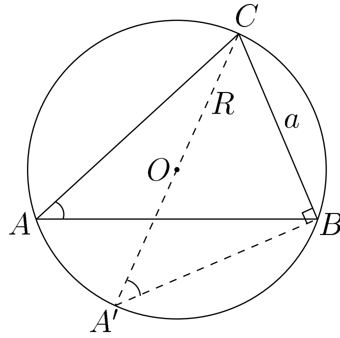
$$16\triangle^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \tag{3.17'}$$

通常把它改写成

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c) \tag{3.17''}$$

此式在西方远在公元前三世纪已由 Archimedes 所求得，但是因为讹传而称之为 Heron’s formula. 而在中国南宋时期，秦九韶也独立地求得此一公式。

4. 正弦定律的第三证法



[图 3–8]

如 [图 3–8] 所示，O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆之圆心，R 是其半径，$\overline{CA'}$ 则是一条直径。由熟知的圆周角等于圆心角之半可见 $\angle A' = \angle A$ 而且 $\triangle A'BC$ 是直角三角形。所以

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R} \tag{3.18}$$

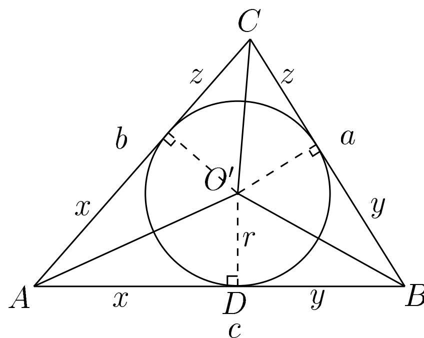
亦即

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R} \tag{3.19}$$

将 (3.19)–式和 (3.13)–式相比，即得外径 R 的公式

$$R = \frac{abc}{4\triangle} \tag{3.20}$$

5. 内切圆半径和半角公式



[图 3–9]

如 [图 3–9] 所示，O' 是 $\triangle ABC$ 的内切圆之圆心，它是三个内角分角线的共交之点。再者 $\triangle O'AB, \triangle O'BC$ 和 $\triangle O'CA$ 的高都是内径 r。即有

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle O'AB + \triangle O'BC + \triangle O'CA \\ &= \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = r \cdot s \end{aligned} \tag{3.21}$$

由此即得

$$r = \frac{\triangle}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \tag{3.22}$$

再者，如 [图 3–9] 所示（用熟知的切线长相等）

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b \tag{3.23}$$

解之即得

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c \tag{3.23'}$$

再由直角三角形 $\triangle ADO'$ 就得出正切的半角公式：

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \tag{3.24}$$

同理亦有

$$\begin{aligned} \tan\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ \tan\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \tag{3.24'}$$

在此，当可顺水推舟，轻而易举地推导正弦、馀弦的半角公式如下。由

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \tag{3.25}$$

即得

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{s(s-a)}} = k \quad \text{（亦即令其为 } k\text{）} \tag{3.25'}$$

再用面积公式

$$
\begin{aligned}
\triangle &= \frac{1}{2}bc\sin A = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \\
&= bc\cdot k^2\sqrt{(s-b)(s-a)}\cdot\sqrt{s(s-a)} = bc\cdot k^2\cdot\triangle \\
\Rightarrow\quad & k^2 = \frac{1}{bc},\quad k = \frac{1}{\sqrt{bc}}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

所以即得

$$
\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \tag{3.27}
$$

同理亦有

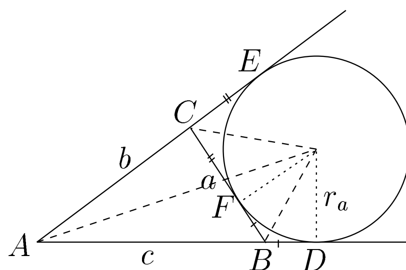
$$
\begin{aligned}
\sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\
\sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}
\end{aligned}
\tag{3.27'}
$$

6. 傍心圆及其半径公式

傍心圆是于 $\triangle ABC$ 外与三角形的一边及另外两边的延线相切的圆，如 [图 3–10] 所示。其半径 r_a 可由下述公式求得：

$$
r_a = s\cdot\tan\frac{A}{2}
$$

[其馀两者也可类似地求得。]



[图 3–10]

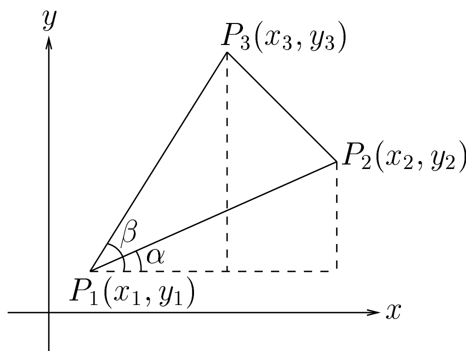
因 $\overline{AD}$ 与 $\overline{AE}$ 同是由 A 点到傍心圆之切线，易见它们应该等长；同理可知 $\overline{BD}=\overline{BF}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$。考虑：

$$\begin{aligned} c+\overline{BD}=\overline{AD}&=\overline{AE}=b+\overline{CE};\\ 2\overline{AD}&=c+\overline{BD}+b+\overline{CE}\\ &=b+c+a=2s \end{aligned}$$

所以 $\overline{AD}=s$，即有：

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r_a}{s},\quad r_a=s\cdot\tan\frac{A}{2}$$

7. 三角形面积的坐标公式



[图 3–11]

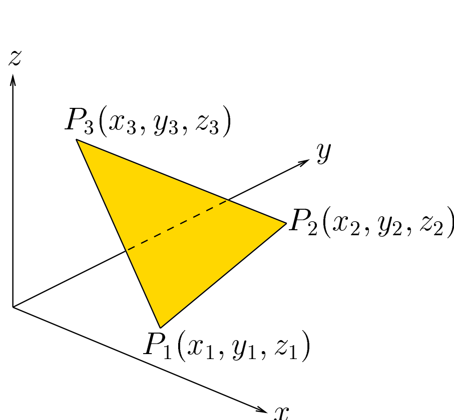
如 [图 3–11] 所示

$$\begin{array}{ll} \overline{P_1P_2}\cos\alpha=x_2-x_1, & \overline{P_1P_2}\sin\alpha=y_2-y_1\\ \overline{P_1P_3}\cos\beta=x_3-x_1, & \overline{P_1P_3}\sin\beta=y_3-y_1 \end{array}\tag{3.28}$$

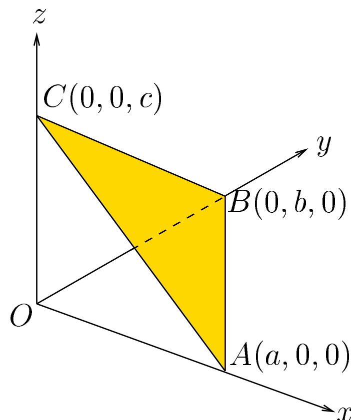
再者，$\triangle P_1P_2P_3$ 的定向面积

$$\begin{aligned} \triangle P_1P_2P_3&=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_3}\sin(\beta-\alpha)\\ &=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_3}(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)\\ &=\frac{1}{2}\Big\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\Big\}\\ &=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

在此，我们不妨继续探讨空间三点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $1 \le i \le 3$, 所定的三角形面积应该如何去用其 9 个坐标 $\{x_i, y_i, z_i, 1 \le i \le 3\}$ 加以表达呢？



[图 3–12]

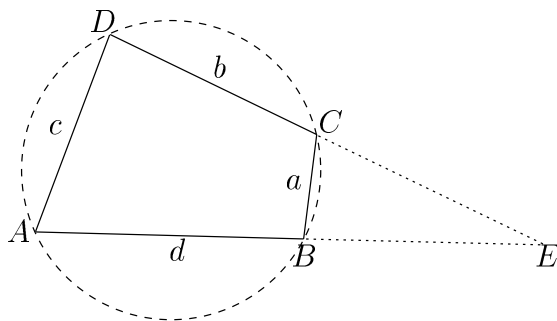


[图 3–12′]

此事也许应该从某种特殊情形的研讨著手。例如 [图 3–12′] 所示者，我们将 $(\triangle ABC)^2$ 的计算留作习题，并试将所算得的结果给以几何解释。

8. <u>圆内接四边形面积公式</u>：令 $\square ABCD$ 为圆内接四边形，其四边边长分别为 a, b, c, d。令 $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$，则 $\square ABCD$ 面积为

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



[图 3–13]

若 $\square ABCD$ 是平行四边形，则它必定是矩形，上述面积公式显然成立。现不妨假设 AB 交 DC 于 E 点，则易见有 $\triangle AED \sim \triangle CEB$，所以有面积比

$$\square ABCD : \triangle AED = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$$

再者，令 $\overline{DE}=b', \overline{AE}=d'$，则由相似三角形定理即有下述比例式：

$$\frac{b'}{c}=\frac{d'-d}{a},\quad \frac{d'}{c}=\frac{b'-b}{a}$$

由两式之和及差即有

$$b'+d'=\frac{c}{c-a}(b+d),\quad b'-d'=\frac{c}{c+a}(b-d)$$

再者，将下述 $\triangle AED$ 的秦九韶公式

$$\triangle AED\ 面积 =\frac{1}{4}\sqrt{(b'+d'+c)(b'+d'-c)(b'-d'+c)(-b'+d'+c)}$$

代换入上面所得的 $b'+d'$ 和 $b'-d'$ 式然後简化：

$$\begin{aligned}
b'+d'+c &= \frac{c}{c-a}(b+d+c-a)=\frac{c}{c-a}(2s-2a)\\
b'+d'-c &= \frac{c}{c-a}(b+d-c+a)=\frac{c}{c-a}(2s-2c)\\
b'-d'+c &= \frac{c}{c+a}(b-d+c+a)=\frac{c}{c+a}(2s-2d)\\
-b'+d'+c &= \frac{c}{c+a}(-b+d+c+a)=\frac{c}{c+a}(2s-2b)
\end{aligned}$$

由此可得

$$\triangle AED\ 面积 =\frac{c^2}{c^2-a^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

即得所求证者。

3.3 习题

(1) 证用正弦、馀弦的复角公式推导下述积化和公式，即

$$\begin{aligned}
\cos A\cdot\cos B &= \frac{1}{2}\big(\cos(A+B)+\cos(A-B)\big)\\
\sin A\cdot\sin B &= \frac{1}{2}\big(\cos(A-B)-\cos(A+B)\big)\\
\sin A\cdot\cos B &= \frac{1}{2}\big(\sin(A+B)+\sin(A-B)\big)
\end{aligned}$$

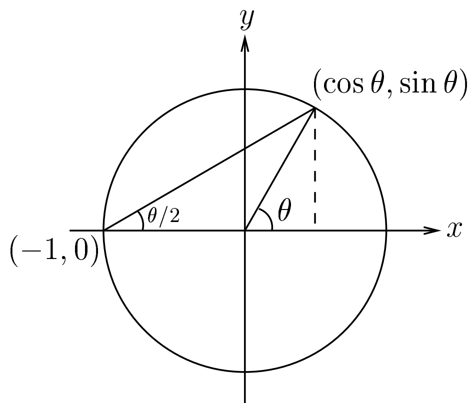
(2) 在上式中，令 $A+B=\alpha, A-B=\beta$。易见 $A=\frac{1}{2}(\alpha+\beta), B=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，用之即可把习题 (1) 中的积化和公式转化成和化积公式。再者，试用类似于 [图 3–5] 者，说明它们和圆的反射对称之间的关系。

(3) 试求用 $\cos\theta$ 分别表达 $\cos\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的公式（亦即半角公式）。

(4) 试用下述图解求

(i) 用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表达 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的公式。

(ii) 用 $\tan\frac{\theta}{2}$ 表达 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的公式。



[图 3–14]

(5) 试用二项定理和

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

求得正弦、馀弦 n–倍角公式。

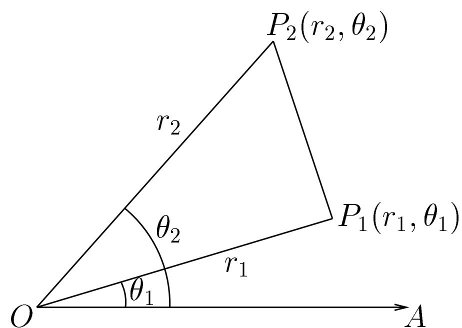
(6) 试求 $z^n-1=0$ 的所有复数解。

(7) 试求 $z^n-(1+i)=0$ 的所有复数解。

(8) 试求用 $\triangle ABC$ 的两边一夹角 $\{a,b,C\}$ 表达其他一边和两角（即 c 和 A, B）之公式。

(9) 试求用 $\triangle ABC$ 的两角一夹边 $\{A,B,c\}$ 表达其他一角和两边（即 C 和 a,b）之公式。

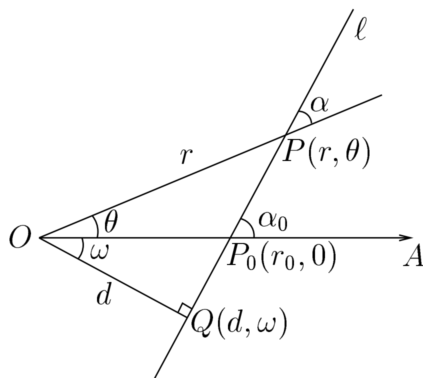
(10) 如 [图 3–15] 所示，P_1, P_2 的极坐标分别是 (r_1,θ_1) 和 (r_2,θ_2)。试求 $\overline{P_1P_2}^2$ 和 $\triangle OP_1P_2$ 的有向面积的极坐标公式。



[图 3–15]

(11) 如 [图 3–16] 所示，α 是直线 ℓ 和矢径 $\overrightarrow{OP}$ 之间的夹角，α_0 是 ℓ 和基准方向 $\overrightarrow{OA}$ 之间的夹角，ω 是 ℓ 的法线 (normal line) 的方向角，d 是原点和 ℓ 之间的距离。试证

$$\begin{cases} r\cdot\sin\alpha = r_0\sin\alpha_0 = d, \\ \sin\alpha = \cos(\theta-\omega) \end{cases}$$



[图 3–16]

(12) 计算 [图 3–12′] 中三角形 $\triangle ABC$ 的面积平方 $(\triangle ABC)^2$，并试将所算的结果给以几何解释。

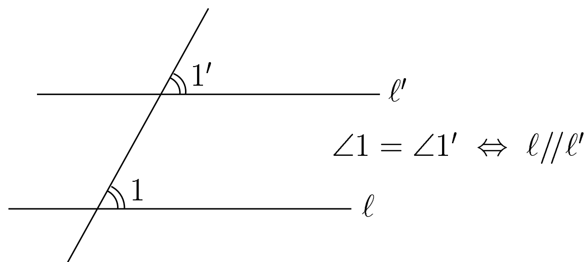
第四章

空间中的平行与垂直——平直性与对称性的交互作用

本章将进而研讨定量空间(亦即立体)几何的基础理论。在空间的种种性质之中，最为基本而且影响无比深远者，首推对称性 (Symmetry) 和平直性 (Flatness 或 Rectilinearity)。两者在三角形上的表述分别就是「S.A.S. 叠合条件」和「三内角和恒为一个平角」。我们将会分别对于平直性和对称性在立体几何中的表现作一番返璞归真的分析，而其所展现者，乃是空间中的「平行」与「垂直」以及两者之间的密切关联。其实平行与垂直乃是整个定量立体几何的基础所在，当然也就是同学们学习立体几何的起点与要点所在。

4.1 平直性与平行

在平面几何中，同学们熟用如 [图 4–1] 所示的同位角相等来检验或构造平行线：



[图 4–1]

在引言和第二章中已经和同学们讨论过，上述验证条件的可行性其实和「三角形内角和恒等于一个平角」是同一件事的两种表现。而欧几里德的著名「第五公设」也就是以公设形式宣称上述条件就是 ℓ_1, ℓ_2 不相交的唯一可能性，亦即以公设形式假设了三角形内角和恒等于一个平角。

开宗明义，在空间中点、直线、平面之间的连结与交截，具有下述三点基本性质（通常也称之为公理）：

其一：相异两点定一直线，不共线三点定一平面。

其二：平面 Π 上相异两点所定的直线会完全包含于 Π 之内。

其三：设 $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \phi$（亦即非空），则 Π_1, Π_2 相交于一条直线或相重（亦即两面之交集不可能仅仅是一个点）。

空间中平行性的定义：

(i) 面、面平行之定义

$$\Pi_1 // \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{cases} \phi \text{ 或} \\ \Pi_1 = \Pi_2 \end{cases}$$

(ii) 线、面平行之定义

$$\ell // \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \ell \cap \Pi = \begin{cases} \phi \text{ 或} \\ \ell \end{cases}$$

(iii) 线、线平行之定义

$$\ell_1 // \ell_2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell_1, \ell_2 \text{ 共面而且 } \ell_1 \cap \ell_2 = \begin{cases} \phi \text{ 或} \\ \ell_1 = \ell_2 \end{cases}$$

注意：线、线平行关系要求两者必须共面。两条不共面的直线的关系则称之为不交线 (skew lines)。

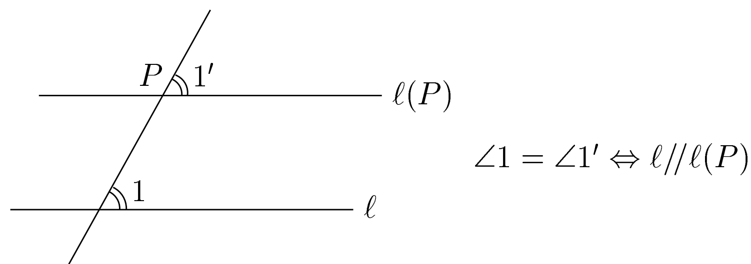
【引理 4.1】：设 $\Pi_1 // \Pi_2, \Pi \cap \Pi_1 = \ell_1, \Pi \cap \Pi_2 = \ell_2$，则 $\ell_1 // \ell_2$。

证明：若 $\Pi_1 = \Pi_2$ 则显然有 $\ell_1 = \ell_2$。若 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi$，则 ℓ_1, ℓ_2 共在 Π 之中而且

$$\begin{aligned} \ell_1 \cap \ell_2 &= \big(\Pi \cap \Pi_1\big) \cap \big(\Pi \cap \Pi_2\big) \\ &= \Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 \\ &= \Pi \cap \phi = \phi \end{aligned}$$

□

在平面几何中关于平行线的一个基本结果是过平面上任何给定点 P，存在唯一一条直线 $\ell(P)$，它和给定直线 ℓ 互相平行。再者，如 [图 4–1′] 所示，同位角相等乃是 $\ell // \ell(P)$ 的一个特徵性质。

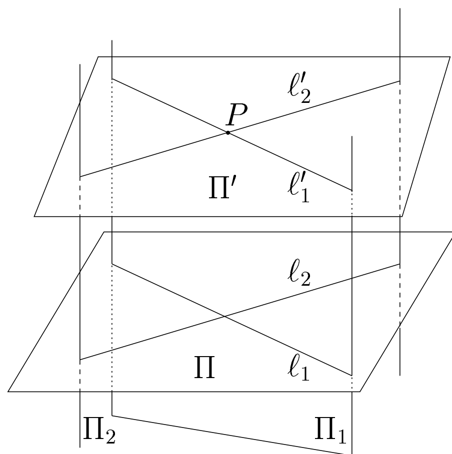


[图 4–1′]

同样的，在立体几何中我们也有下述定理：

【定理 4.1】：对于一个给定平面 Π 和一个给定点 P，存在唯一的一个平面 $\Pi(P)$，它过 P 点而且 $\Pi(P)//\Pi$。

证明：我们将用解作图题的手法和精神去证明上述 $\Pi(P)$ 的唯一存在性。



[图 4–2]

当 $P \in \Pi$ 时，显然有 $\Pi(P) = \Pi$，所以只需讨论 $P \notin \Pi$ 的情形。我们所要论证者乃是一个包含 P 而且和 Π 不相交的平面是唯一存在的。先证其唯一性：设 Π' 是一个这样的平面，如 [图 4–2] 所示，在 Π 上

任取两条相交的直线 ℓ_1, ℓ_2。令

$$\Pi_1 =<\{P\} \cup \ell_1>,\ \Pi_2 =<\{P\} \cup \ell_2>;$$
$$\ell_1' = \Pi_1 \cap \Pi',\ \ell_2' = \Pi_2 \cap \Pi'$$

由[引理 4.1]得知

$$\ell_1' // \ell_1 \text{（在 } \Pi_1 \text{ 之中），} \quad \ell_2' // \ell_2 \text{（在 } \Pi_2 \text{ 之中）}$$

再者，由平面几何中平行线的唯一性可知 ℓ_1', ℓ_2' 分别在 Π_1, Π_2 之中是唯一存在的。因此唯一地确定了 $\Pi' =<\ell_1' \cup \ell_2'>$。

其实上述论证业已明确地指出这样一个 Π' 的构造作图法。现在直截了当地用构造来证明其存在性：

第一步：在 Π 上任取相交的两条直线 ℓ_1, ℓ_2。令 $\Pi_1 =< \{P\} \cup \ell_1 >$, $\Pi_2 =<\{P\} \cup \ell_2>$。

第二步：用平面几何所熟知的作图法分别在 Π_1, Π_2 中作过 P 点而且分别平行于 ℓ_1, ℓ_2 的直线 ℓ_1', ℓ_2'。令 $\Pi(P) =<\ell_1' \cup \ell_2'>$，则 $\Pi(P) \cap \Pi = \phi$。不然，则 $\Pi(P)$ 和 Π 的交线 ℓ 至少和 ℓ_1, ℓ_2 中之一交于一点 Q。则有

$$\begin{aligned} \ell_i \cap \ell &= \big(\Pi_i \cap \Pi\big) \cap \big(\Pi(P) \cap \Pi\big) \\ &= \big(\Pi_i \cap \Pi\big) \cap \big(\Pi_i \cap \Pi(P)\big) \\ &= \ell_i \cap \ell_i' \end{aligned}$$

其中至少有一是非空的，和所作 $\ell_1 // \ell_1', \ell_2 // \ell_2'$ 相矛盾。 □

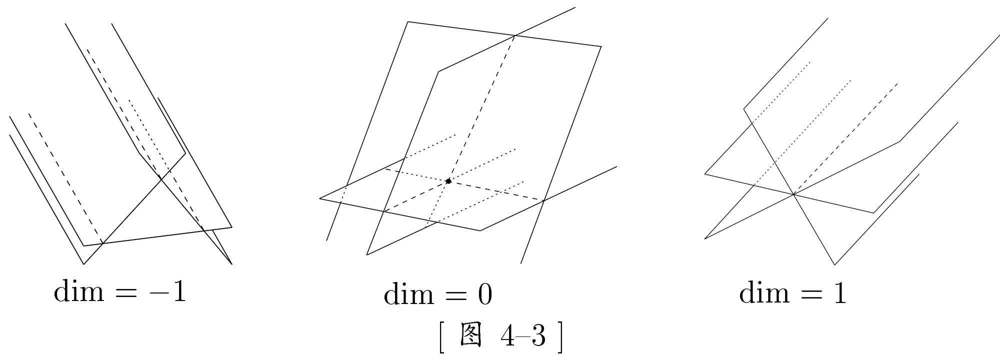
【推论】：设 $\Pi // \Pi'$ 和 $\Pi' // \Pi''$，则 $\Pi // \Pi''$。

证明：设 $\Pi \cap \Pi'' \neq \phi$。令 P 为 $\Pi \cap \Pi''$ 中一点，则 Π 和 Π'' 都是过 P 点而且和 Π' 平行者。所以由[定理 4.1]的唯一性得知 $\Pi = \Pi''$，亦即

$$\Pi \cap \Pi'' = \begin{cases} \phi \\ \Pi = \Pi'' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi // \Pi''$$

【引理 4.2】：设 $\Pi_i,\ 1 \leq i \leq 3,$ 是三个两两相交于一直线的平面。令 $\Pi_i \cap \Pi_j = \ell_k,\ (i,j,k) \sim (1,2,3)$，则其交截有下列三种可能性，即

$$\dim \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ell_1 // \ell_2 // \ell_3 \\ \ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = \{P\} \\ \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 \end{cases}$$



[图 4–3]

证明：

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \big(\Pi_2 \cap \Pi_3\big) \cap \big(\Pi_1 \cap \Pi_3\big) = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$$

同理亦有

$$\ell_2 \cap \ell_3 = \ell_1 \cap \ell_3 = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$$

由此可见，在 $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ 是 1–维时三线相重，而当其为 0–维时则三线共交于一点，即 $\{P\} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$。再者，当 $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \phi$ 时，则有 $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ 两两共面而且不相交，亦即

$$\ell_1 // \ell_2, \quad \ell_2 // \ell_3, \quad \ell_3 // \ell_1$$

□

【定理 4.2】：设 $\ell_1 // \ell_2, \ell_2 // \ell_3$，则 $\ell_1 // \ell_3$。

证明：若三线中有两线相重，则上述命题显然成立。所以只需讨论三线相异的情形如下：令

$$<\ell_1 \cup \ell_2> = \Pi_3, \quad <\ell_2 \cup \ell_3> = \Pi_1$$

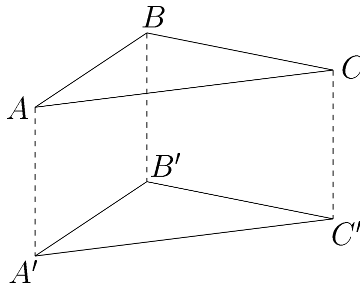
在 ℓ_3 上任取一点 P，令

$$<\{P\} \cup \ell_1> = \Pi_2, \quad \ell_3' = \Pi_1 \cap \Pi_2$$

由[引理 4.2]即有 $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3'\}$ 两两互相平行。所以 ℓ_3 和 ℓ_3' 都是 Π_1 中过 P 点而且和 ℓ_2 平行者。由平面几何中平行线的唯一性得知 $\ell_3 = \ell_3'$。这也就证明了 $\ell_1 // \ell_3$。 □

【推论】：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是空间中两个三角形。若 $\{\overline{AB}, \overline{A'B'}\}$ 和 $\{\overline{BC}, \overline{B'C'}\}$ 分别同向平行而且等长，则 $\{\overline{AC}, \overline{A'C'}\}$ 也同向平行而且等长。

<u>证明</u>：连结 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 和 $\overline{CC'}$。由所设和平面几何中平行四边形的特徵性质定理，可见 ▱$ABB'A'$ 和 ▱$BCC'B'$ 都是平行四边形。因此 $\overline{AA'}//\overline{BB'}$，$\overline{BB'}//\overline{CC'}$ 而且等长。由[定理 4.2]，$\overline{AA'}//\overline{CC'}$ 而且等长。所以 ▱$ACC'A'$ 也是平行四边形。就这证明了 $\overline{AC}$ 和 $\overline{A'C'}$ 也是同向平行而且等长（参看 [图 4–4]）。 □



[图 4–4]

【习题】：

(1) 若 $\Pi//\Pi'$, $\ell\subset\Pi$，则 $\ell//\Pi'$。试证之。

(2) 设 $\ell_1\cap\ell_2=\{P\}$, $<\ell_1\cup\ell_2>=\Pi$。若 $\ell_1//\Pi'$, $\ell_2//\Pi'$，则 $\Pi//\Pi'$。试证之。

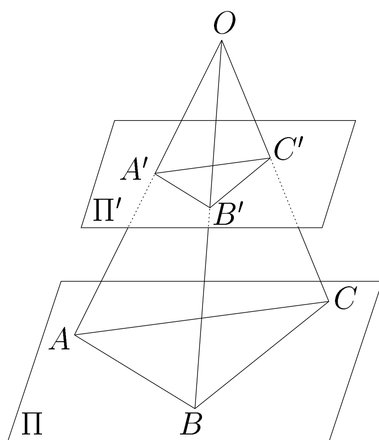
(3) 设 $\ell\cap\Pi=\phi$, $\Pi_1\cap\Pi_2=\ell$, $\Pi_1\cap\Pi=\ell_1$, $\Pi_2\cap\Pi=\ell_2$。试证 $\ell_1//\ell_2$。

(4) 设 $\Pi_1\cap\Pi_2=\ell'$ 而且 $\ell//\Pi_1$, $\ell//\Pi_2$。试证 $\ell//\ell'$。

(5) 设 $\Pi\cap\Pi'=\phi$，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别位于 Π 和 Π' 之中。若 AA', BB', CC' 三线共交于一点 O（如 [图 4–5] 所示）则 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$（为相似三角形）。试证之。

(6) 如 [图 4–5] 所示，$\Pi=<\{A,B,C\}>$, $\Pi'=<\{A',B',C'\}>$ 而且 AA', BB' 和 CC' 三线共交于 O 点。若 $\triangle OAB\sim\triangle OA'B'$ 和 $\triangle OBC\sim\triangle OB'C'$，则 $\Pi//\Pi'$。试证之。

(7) 如 [图 4–5] 所示和上题所设，若 AB 和 $A'B'$，AC 和 $A'C'$，BC 和 $B'C'$ 各自交于一点，则上述三个交点共线。试证之。



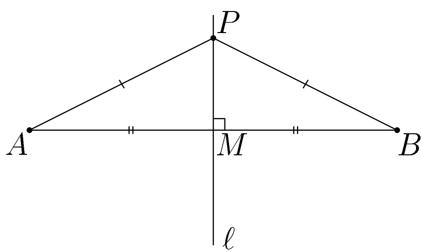
[图 4–5]

4.2 对称性与垂直

4.2.1 垂直平分线与平面上的反射对称

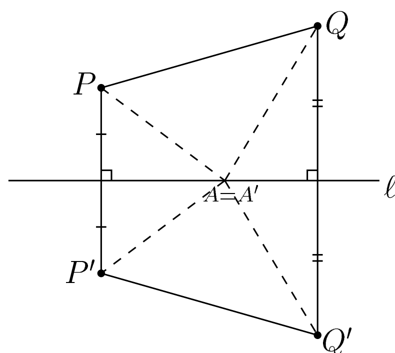
让我们先来温习一下平面的情形：

- 平面中和给定两点 A, B 等距的点集（亦称之为轨迹）是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线



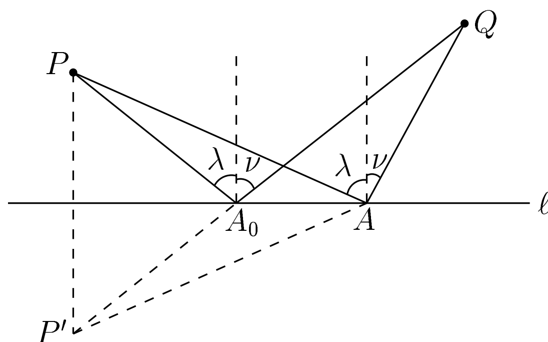
[图 4–6]

- 平面对于其中一条给定直线 ℓ 成反射对称；P, P' 对于 ℓ 互为对称点的充要条件是 $\overline{PP'}$ 被 ℓ 所垂直平分或 $P = P' \in \ell$（如 [图 4–7] 所示，试证 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{P'Q'}$ 恒为等长。）



[图 4–7]

【习题】：



[图 4–8]

如 [图 4–8] 所示，设 A 是 ℓ 上的任给一点，λ 和 ν 是 $\overline{PA}$ 和 $\overline{AQ}$ 与 ℓ 的垂线之间的夹角。试证 $\overline{PA}+\overline{AQ}$ 在 $\lambda=\nu$ 时为极小（亦即 $\overline{QA_0}$ 的延长线过 P 的对称点 P' 者）。

上述平面上的反射对称和垂直平分线之间的简洁关系在空间的推广乃是立体几何极为基本的要点。首先，我们要研讨空间之中和给定两点 A, B 等距的点集，即

【定理 4.3】：设 A, B 是给定相异两点，$\mathcal{S}$ 是空间中所有和 A, B 等距的点所构成者。则 $\mathcal{S}$ 是一个过 $\overline{AB}$ 中点 M 的平面，而且 $\mathcal{S}$ 上任何过 M 点的直线都和 $\overline{AB}$ 垂直（亦称正交）。

[一个简约的描述是：$\mathcal{S}$ 乃是直线段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面。]

证明：论证的要点在于证明 $\mathcal{S}$ 的平直性。设 P_1, P_2 是 $\mathcal{S}$ 之中的相异两点，而 P 是直线 P_1P_2 上任给一点。我们所要证者是 P 点也必然

属于 $\mathcal{S}$，亦即由所设

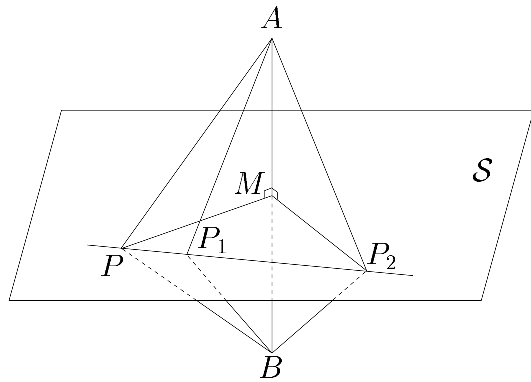
$$\overline{AP_1}=\overline{BP_1},\quad \overline{AP_2}=\overline{BP_2},\quad P\in P_1P_2$$

推论 $\overline{AP}=\overline{BP}$。兹证之如下：

由所设 $\triangle AP_1P_2$ 和 $\triangle BP_1P_2$ 满足 S.S.S. 全等条件，所以

$$\angle PP_1A=\angle PP_1B,\quad \angle PP_2A=\angle PP_2B$$

由此可见，$\triangle PP_1A$ 和 $\triangle PP_1B$ 满足 S.A.S. 全等条件，即有 $\triangle PP_1A\cong\triangle PP_1B$，所以 $\overline{AP}=\overline{BP}$。（同理也有 $\triangle PP_2A\cong\triangle PP_2B$，但只用其一已经证得 $\overline{AP}=\overline{BP}$。）所以 $\mathcal{S}$ 是一个平直子集，它显然包含 $\overline{AB}$ 的中点 M，但不是包含 A,B。而且对于任给一个 $\mathcal{S}$ 中相异于 M 的点 P，$\mathcal{S}\cap<\{A,B,P\}>$ 等于平面 $<\{A,B,P\}>$ 中 $\overline{AB}$ 的垂直平分线，所以 $\mathcal{S}$ 必定是一个平面。它其实是由所有这种垂直平分线所组合成者（参看[图 4–9]）。 □



[图 4–9]

【推论】：设 $\ell\cap\Pi=\{M\}$，而且 ℓ 和 Π 上两条相异的 MP_1, MP_2 正交，则 ℓ 和 Π 上任给过 M 点的直线皆正交。

证明：在直线 ℓ 上任取一直线段 $\overline{AB}$ 以 M 为其中点，令 $\mathcal{S}$ 为 $\overline{AB}$ 的垂直平分面。由所设 M, P_1, P_2 是 $\mathcal{S}$ 和 Π 上不共线三点。所以 $\mathcal{S}=\Pi$。

【线、面垂直之定义】：若 $\ell\cap\Pi=\{M\}$ 而且 ℓ 和 Π 上所有过 M 点的直线皆为正交，则称 ℓ 垂直于 Π，以 $\ell\perp\Pi$ 记之。

[上述推论则说，只要检验其中两条在 Π 上过交点 M 和 ℓ 的正交性，即可得知 $\ell\perp\Pi$。]

4.2.2 立体几何中的作图题

在讨论立体几何的作图题之前，让我们先分析一下它和平面几何的作图题在实践上的基本差别：

(i) 一张纸、一块黑板都是一个平面的局部，因此常用的平面几何作图是真的可以在一张纸或黑板上逐步用直尺、圆规去画出来的。但是立体几何的作图所要用到的是 3–维的「纸」或「黑板」才能实地执行之。而这种 3–维的「纸」和「黑板」是不实用而且难以供应的。

(ii) 在平面几何作图中，可以用直尺去画出纸上两点所决定的那条直线的局部，但是在立体几何作图中并没有一个简单的工具能够利落简洁地画出不共线三点所决定的那个平面的局部。

(iii) 由此可见，立体几何作图在本质上乃是「理念作图」。我们真正所要做的是把某种唯一存在、简单而且基本的立体几何事物，在理念中逐步分解成某些特定的平面上的平面几何作图的组合而加以明确的刻划。这种理念作图在训练如何把立体几何中的基本图象归于平面几何作图来加以分析。唯有通过这种理念作图的练习，才能学会如何有效运用平面几何所学者去进而理解空间的本质。我们与生俱来的视觉是具有相当好的空间想象能力的，但是要把它提升到对于空间图象及其所蕴含的空间本质的洞察力，这种训练是不可缺的！

[例如在[定理 4.2]的存在性的证明中，所做的就是这种理念作图。]

【基本作图题 4.1】：过直线 ℓ 上的给定点 M，作其垂面。

作法：在 ℓ 外取两点 P_1, P_2 使得

$$\Pi_1 = <\ell \cup \{P_1\}> \text{ 和 } \Pi_2 = <\ell \cup \{P_2\}> \text{ 相异。}$$

用平面几何基本作图分别作 Π_1 和 Π_2 中过 M 点而且和 ℓ 垂直的直线 ℓ_1, ℓ_2。则 $\Pi = <\ell_1 \cup \ell_2>$ 即为所求作的垂面。[证明留作习题]

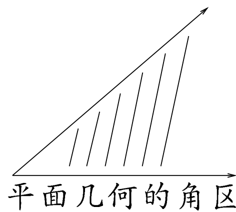
【基本作图题 4.2】：过平面 Π 上一点 P，作其垂线。

作法：在 Π 上任取一条过 P 点的直线 ℓ。过 P 点用[基本作图 4.1]作 ℓ 的垂面 Π_1。令 $\ell_1 = \Pi_1 \cap \Pi$，再在 Π_1 中作过 P 点而且垂直于 ℓ_1 的直线，即为所求作的直线。[证明留作习题]

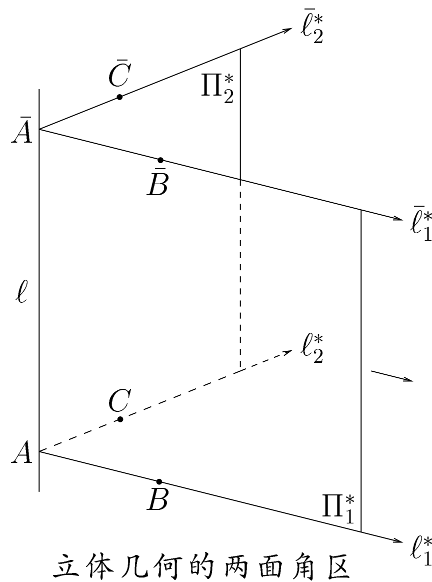
【基本作图题 4.3】：设 P 是平面 Π 之外的给定点。求作过 P 点而且垂直于 Π 的直线。

作法：先在 Π 上任取一点 Q。用[基本作图 4.2]作和 Π 正交于 Q 的直线 ℓ_1。若 ℓ_1 恰好也过 P 点，则 ℓ_1 即为所求作者。不然，令 $\Pi_1 = <\{P\} \cup \ell_1>$，再用平面几何基本作图在平面 Π_1 中作过 P 点而且和 ℓ_1 平行的直线 $\ell(P)$，则 $\ell(P)$ 即为所求作的垂线。[证明留作习题]

在平面几何中，一个角区的边界由两条共顶点的半线（亦即射线）所组成。相类似地，空间的一个两面角区的边界是由两个共顶棱的半平面所组成（参看 [图 4–10]）。



平面几何的角区



立体几何的两面角区

[图 4–10]

【引理 4.3】：如 [图 4–10] 所示，设 $A, \bar{A}$ 是 ℓ 上任取两点。$\Pi, \bar{\Pi}$ 分别是过 $A, \bar{A}$ 而且和 ℓ 正交的平面。令

$$\ell_1^* = \Pi \cap \Pi_1^*,\ \ \ell_2^* = \Pi \cap \Pi_2^*$$
$$\bar{\ell}_1^* = \bar{\Pi} \cap \Pi_1^*\ \ \bar{\ell}_2^* = \bar{\Pi} \cap \Pi_2^*$$

则有 $\angle\ell_1^*,\ell_2^*) = \angle\bar{\ell}_1^*,\bar{\ell}_2^*)$。

<u>证明</u>：如 [图 4–10] 所示，在射线 ℓ_1^*, ℓ_2^*, $\bar{\ell}_1^*$, $\bar{\ell}_2^*$ 上分别取 B, C, $\bar{B}$, $\bar{C}$ 使得 $\overline{AB} = \overline{\bar{A}\bar{B}}$, $\overline{AC} = \overline{\bar{A}\bar{C}}$。由所作易见 $\overline{AB}$ 和 $\overline{\bar{A}\bar{B}}$；$\overline{AC}$ 和 $\overline{\bar{A}\bar{C}}$ 皆为同向平行而且等长。再由[定理 4.2]的推论即有 $\overline{BC}$ 和 $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ 也是同向平行而且等长的。所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 满足 S.S.S. 全等条件，$\angle\ell_1^*,\ell_2^*) = \angle A = \angle\bar{A} = \angle\bar{\ell}_1^*,\bar{\ell}_2^*)$。 □

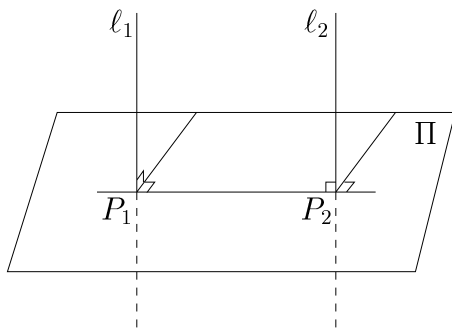
【两面角的定义】：$\angle\Pi_1^*,\Pi_2^*)$ 的大小定义为 $\angle\ell_1^*,\ell_2^*)$，因为後者是和 ℓ 上 A 点的选取无关的！再者，在 $\angle\Pi_1^*,\Pi_2^*) = \frac{\pi}{2}$ 时，则称两面正交，以符号 $\Pi_1 \perp \Pi_2$ 记之。

【基本作图题 4.4】：设 $\ell \subset \Pi$, $\mathfrak{U}_\Pi^*$ 是以平面 Π 为边界的半空间，Π_ℓ^* 是 Π 中以 ℓ 为边界的半平面。求作 $\mathfrak{U}_\Pi^*$ 中那个和 Π_ℓ^* 共以 ℓ 为顶棱的半平面 $\bar{\Pi}_\ell^*$，使得 $\angle\Pi_\ell^*,\bar{\Pi}_\ell^*)$ 等于一个给定角。

<u>作法</u>：在 ℓ 上任取一点 A，过 A 点作 ℓ 的垂面 Π_1，令 $\ell_1^* = \Pi_1 \cap \Pi_\ell^*$。再用平面几何基本作图在 Π_1 中的半面 $\Pi_1 \cap \mathfrak{U}_\Pi^*$ 中作那条半线 ℓ_2^* 使得 $\angle\ell_1^*,\ell_2^*)$ 等于给定角。则 $<\ell \cup \ell_2^*> \cap \mathfrak{U}_\Pi^*$ 就是所求作者。[由上述定义，可见证明是显然的。]

【引理 4.4】：设 $\ell_1 \perp \Pi$, $\ell_2 \perp \Pi$，则 $\ell_1 // \ell_2$。

<u>证明</u>：令 $P_1 = \ell_1 \cap \Pi$, $P_2 = \ell_2 \cap \Pi$。若 $P_1 = P_2$，则 $\ell_1 = \ell_2$。若 $P_1 \neq P_2$，令 $\Pi' = <\ell_1 \cup \{P_2\}>$, ℓ_2' 是 Π' 中过 P_2 点而且和 ℓ_1 平行的直线。由 $\ell_1 \perp \Pi$ 可见 $\angle\Pi,\Pi') = \frac{\pi}{2}$。再由[引理 4.3]，可证 $\ell_2' \perp \Pi$。所以 $\ell_2' = \ell_2$，亦即 $\ell_1 // \ell_2$（参看 [图 4–11]）。



[图 4–11]

【习题】：

(1) 证明[基本作图 4.1]的作法所得者乃是唯一合乎所求作的条件者。

(2) 证明[基本作图 4.2]的作法所得者乃是唯一合乎所求作的条件者。

(3) 证明[基本作图 4.3]的作法所得者乃是唯一合乎所求作的条件者。

(4) 设 $\Pi \perp \ell, \Pi' \perp \ell$，则 $\Pi // \Pi'$。试证之。

(5) 设 $\Pi \perp \ell$ 而且 $\Pi // \Pi'$，则 $\ell \perp \Pi'$。试证之。

(6) 设 $\ell_1 \perp \Pi, \ell_1 // \ell_2$，则 $\ell_2 \perp \Pi$。试证之。

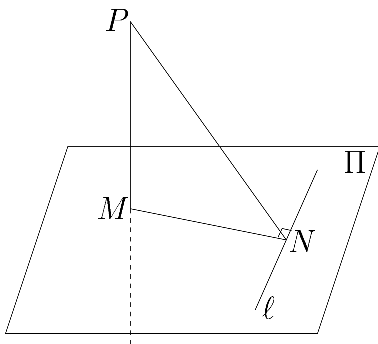
(7) 设 $\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$ 而且 $\ell_1 // \Pi, \ell_2 // \Pi$，则 $<\ell_1 \cup \ell_2> // \Pi$。试证之。

(8) 设 $\ell \perp \Pi, \Pi' \supset \ell$，则 $\Pi' \perp \Pi$。试证之。

(9) 设 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \ell, \Pi_1 \perp \Pi, \Pi_2 \perp \Pi$，则 $\ell \perp \Pi$。试证之。

(10) 设 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi, \ell_1, \ell_2$ 是两条垂直于 Π_1, Π_2 的直线。令 $P_1 = \ell_1 \cap \Pi_1$, $P_2 = \ell_1 \cap \Pi_2, Q_1 = \ell_2 \cap \Pi_1, Q_2 = \ell_2 \cap \Pi_2$，试证 $\overline{Q_1Q_2}$ 和 $\overline{P_1P_2}$ 等长。
[上述和公垂线选取无关的长度，将定义为 Π_1, Π_2 这一对平行面之间的距离，将以符号 $d(\Pi_1, \Pi_2)$ 记之。]

(11) 如 [图 4–12] 所示，PM 和 Π 正交于 $M, \ell \subset \Pi$，MN 和 ℓ 正交于 N，则 PN 和 ℓ 正交。试证之。



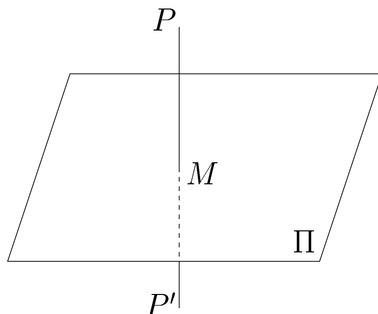
[图 4–12]

[提示：要点在于证明 $<\{P, M, N\}>$ 和 ℓ 是正交的。]

(12) 【基本作图题 4.5】过直线 ℓ 之外一点 P 作其垂面 $\Pi(P)$。

4.2.3 空间反射对称性与垂直投影

对于空间中一个给定平面 Π，每个点 P 有一个唯一的对称点 P'。若 $P \in \Pi$ 则其对称点 P' 就是 P 本身。若 $P \notin \Pi$，则 $\overline{PP'}$ 以 Π 为其垂直平分面，如 [图 4–13] 所示。易见 P 也就是 P' 的对称点。



[图 4–13]

【定义】：上述空间中 $P \mapsto P'$ 这个变换 (transformation) 叫做空间对于给定平面 Π 的反射对称，将以符号 $\mathfrak{R}_\Pi$ 记之，亦即

$$\text{当} \begin{Bmatrix} P \in \Pi \\ P \notin \Pi \end{Bmatrix} \text{时，} \begin{cases} \mathfrak{R}_\Pi(P) = P, \\ \overline{P\,\mathfrak{R}_\Pi(P)} \text{ 被 } \Pi \text{ 所垂直平分。} \end{cases}$$

显然有 $\mathfrak{R}_\Pi\big(\mathfrak{R}_\Pi(P)\big) = P$ 恒成立，亦即 $\mathfrak{R}_\Pi^2$ 乃是空间的恒等变换。

【定理 4.4】：$\mathfrak{R}_\Pi$ 是空间的一个保长变换，亦即直线段 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{\mathfrak{R}_\Pi(P)\,\mathfrak{R}_\Pi(Q)}$ 恒为等长。

证明：在此我们采用简约符号 P' 表示 $\mathfrak{R}_\Pi(P)$，而且把证明分为下述四种情形：

(i) 若 $P, Q \in \Pi$ 时，$P' = P$, $Q' = Q$。$\overline{P'Q'}$ 就是 $\overline{PQ}$ 本身。

(ii) 若 P, Q 中其一个属于 Π，设其为 P。则 $P' = P$，而 $\overline{QQ'}$ 被 Π 所垂直平分。所以 $\triangle PQQ'$ 的中线 $\overline{PM}$ 和底边 $\overline{QQ'}$ 正交，亦即 $\triangle PQQ'$ 是等腰三角形，即已证得 $\overline{PQ} = \overline{PQ'} = \overline{P'Q'}$。

(iii) 若 $PQ \cap \Pi = \phi$，令 $\overline{PP'}$ 和 $\overline{QQ'}$ 的中点分别为 M, N。则易证 $\square PMNQ$ 和 $\square P'MNQ'$ 都是矩形，所以即有 $\overline{PQ} = \overline{MN} = \overline{P'Q'}$。

(iv) 若 $PQ \cap \Pi = \{A\}$，则 (ii) 之所证可见 $\triangle APP'$ 和 $\triangle AQQ'$ 都是等腰的，亦即

$$\overline{AP} = \overline{AP'}, \quad \overline{AQ} = \overline{AQ'} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{P'Q'} \qquad \square$$

[注]：保长变换的组合当然还是保长变换。现在让我们来分析一下，对于两个（相异的）平面 Π_1, Π_2 的反射对称的组合 $\mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}(P) = \mathfrak{R}_{\Pi_2}\big(\mathfrak{R}_{\Pi_1}(P)\big)$ 究竟是一种怎样的保长变换。为此，我们将采用简约符号

$$P' = \mathfrak{R}_{\Pi_1}(P), \quad P'' = \mathfrak{R}_{\Pi_2}(P') = \mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}(P)$$

下面将分成 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi$ 和 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \ell$ 这两种情形来加以分析：

<u>情况一</u>：$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi$（亦即 $\Pi_1 // \Pi_2$）

令 $\ell(P)$ 是过 P 点而且和 Π_1, Π_2 正交的直线，易见 P', P'' 点都在 $\ell(P)$ 上。令 $Q_1 = \ell(P) \cap \Pi_1$, $Q_2 = \ell(P) \cap \Pi_2$，并以 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 为 $\ell(P)$ 上的正向，则有下述有向长度关系式，即

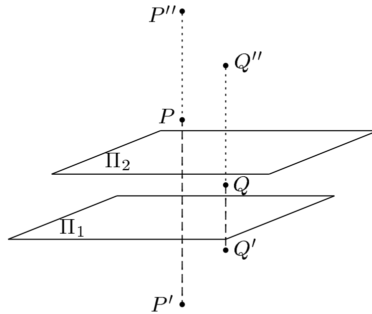
$$\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{Q_1P'}, \quad \overrightarrow{P'Q_2} = \overrightarrow{Q_2P''}, \quad \overrightarrow{Q_1P'} + \overrightarrow{P'Q_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$$

所以

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = 2\,\overrightarrow{Q_1P'} + 2\,\overrightarrow{P'Q_2} = 2\,\overrightarrow{Q_1Q_2}$$

我们把上述分析之所得叙述为[定理 4.5]：

【定理 4.5】：设 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi$，则 $\mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}$ 把空间中每一点 P 沿著垂直于 Π_1, Π_2 的方向（亦即同向平行于 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 者）向前移动 $2d\big(\Pi_1, \Pi_2\big)$。[这种保长变换叫做平移 (translation)。]



[图 4–14]

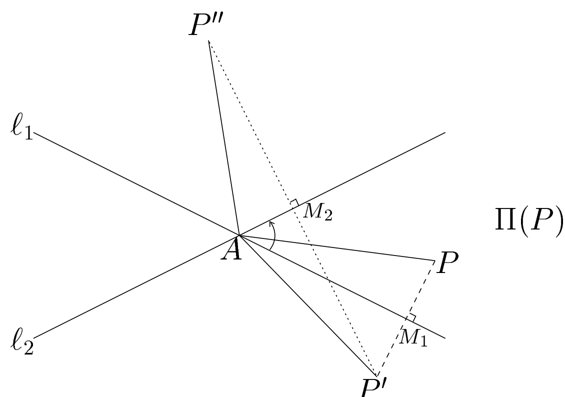
<u>情况二</u>：$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \ell$（相交于直线 ℓ）

令 $\Pi(P)$ 是过 P 点而且和 ℓ 垂直的平面（[基本作图 4.5]，亦即习题 (12)），则 $\Pi(P) \perp \Pi_1, \Pi(P) \perp \Pi_2$。由此易证 P' 和 P'' 点都和 P 点共在 $\Pi(P)$ 之中（证明留作习题）。令 $\ell_1 = \Pi(P) \cap \Pi_1$, $\ell_2 = \Pi(P) \cap \Pi_2$, $A = \ell \cap \Pi(P)$。在 $\Pi(P)$ 上选取正向转角使得

$$0 < \angle \Pi_1, \Pi_2) = \angle \ell_1, \ell_2) \leq \frac{\pi}{2}$$

则有下述 $\Pi(P)$ 中定向角的关系式，即如 [图 4–15] 所示

$$\angle PAM_1 = \angle M_1AP', \quad \angle P'AM_2 = \angle M_2AP''$$



[图 4–15]

所以
$$\begin{aligned}\angle PAP'' &= \angle PAP' + \angle P'AP'' \\ &= 2\angle M_1AP' + 2\angle P'AM_2 \\ &= 2\angle M_1AM_2 \\ &= 2\angle \Pi_1, \Pi_2)\end{aligned}$$

上述分析已经证得下述定理，即

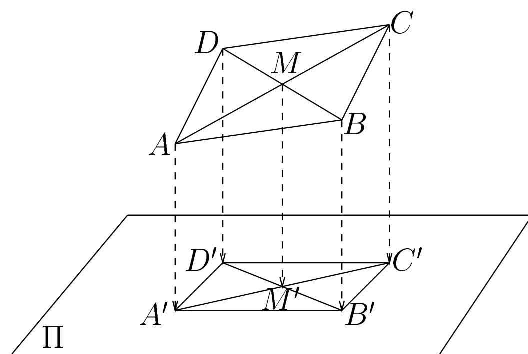
【定理 4.6】：设 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \ell, \theta = \angle \Pi_1, \Pi_2)$，则 $\mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}$ 保持任何一个 ℓ 的垂面 $\Pi(P)$ 为不变子集 (invariant subset)，而 ℓ 本身则是它的定点子集 (subset of fixed points)。再者，把 $\mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}$ 限制到任一不变平面 $\Pi(P)$ 上的作用乃是一个 2θ–角的旋转 (rotation)。

[这种保长变换叫做空间绕 ℓ–轴的旋转。]

垂直投影 (orthogonal projection)：

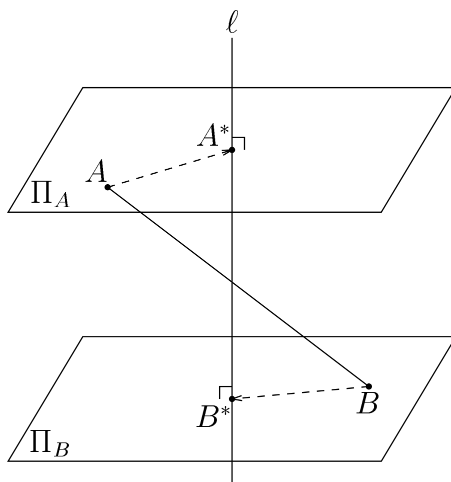
对于空间中一个给定平面 Π，过每一点 P 可作唯一一条直线 $\ell(P)$ 和 Π 正交。对于空间一条给定直线 ℓ，过每一点 P 可作唯一一个平面 $\Pi(P)$ 和 ℓ 正交。运用上述两个事实就可以定义空间的两种垂直投影：

【定义】：空间对于一个给定平面 Π 的垂直投影把 P 点映射到 $\ell(P)\cap\Pi$。由此可见，它把每条垂直于 Π 的直线上的所有点都映射到该直线和 Π 的交点，将以符号 $\mathfrak{P}_\Pi$ 记之。



[图 4–16]

【定义】：空间对于一个给定直线 ℓ 的垂直投影把 P 点映射到 $\Pi(P)\cap\ell$。由此可见，它把每个和 ℓ 垂直的平面上的所有点，全都映射到它和 ℓ 的交点，将以 $\mathfrak{P}_\ell$ 记之。



[图 4–17]

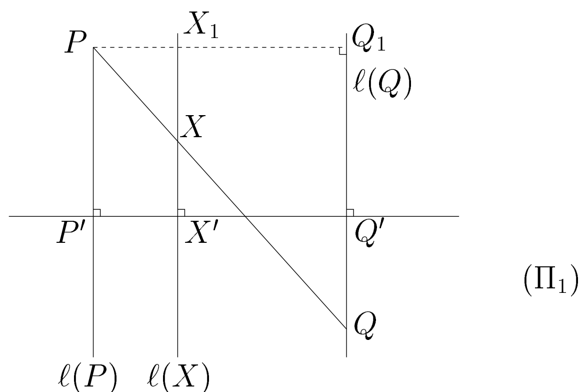
【定理 4.7】：以简约符号 P' 表示 $\mathfrak{P}_\Pi(P)$。设 $P' \neq Q'$，则有 $X \in PQ \Rightarrow X' \in P'Q'$ 而且

$$\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{XQ}} = \frac{\overrightarrow{P'X'}}{\overrightarrow{X'Q'}} \quad \text{（有向比相等）}$$

证明：令 $\Pi_1 = <\ell(P) \cup \ell(Q)>$, $\big(\ell(P) // \ell(Q)\big)$。由所设

$$X \in PQ \text{ 和 } \ell(X) // \ell(P) // \ell(Q) \quad \Rightarrow \quad \ell(X) \subset \Pi_1$$

由此可见 $X' \in P'Q'$（整个 Π_1 在 $\mathfrak{P}_\Pi$ 下的象点点集）。



[图 4–18]

再者，如 [图 4–18] 所示和平面几何中的相似三角形定理，即得

$$\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{XQ}} = \frac{\overrightarrow{PX_1}}{\overrightarrow{X_1Q_1}} = \frac{\overrightarrow{P'X'}}{\overrightarrow{X'Q'}} \qquad \square$$

【推论】：若 $\square ABCD$ 是一个平行四边形而且 A', B', C', D' 不共线，则 $\square A'B'C'D'$ 也是一个平行四边形（见 [图 4–16]）。

证明：由所设 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 互相平分。由[定理 4.7]，即得 $\overline{A'C'}$ 和 $\overline{B'D'}$ 也互相平分，所以 $\square A'B'C'D'$ 也是一个平行四边形。 $\square$

【定理 4.8】：以简约符号 P^* 表示 $\mathfrak{P}_\ell(P)$。设 $P^* \neq Q^*, X \in PQ$，则同样地也有

$$\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{XQ}} = \frac{\overrightarrow{P^*X^*}}{\overrightarrow{X^*Q^*}}$$

证明：过 P 点作 ℓ 的平行线 ℓ'。则 ℓ' 和 $\Pi(P), \Pi(Q), \Pi(X)$ 也都是正交的。令

$$\Pi_1 = <PQ \cup \ell'>,\ X_1 = \ell' \cap \Pi(X),\ Q_1 = \ell' \cap \Pi(Q)$$

则易见

$$\overrightarrow{P^*X^*} = \overrightarrow{PX_1}, \quad \overrightarrow{X^*Q^*} = \overrightarrow{X_1Q_1}$$

而同样的图形和相似三角形定理即得

$$\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{XQ}} = \frac{\overrightarrow{P^*X^*}}{\overrightarrow{X^*Q^*}} \qquad \square$$

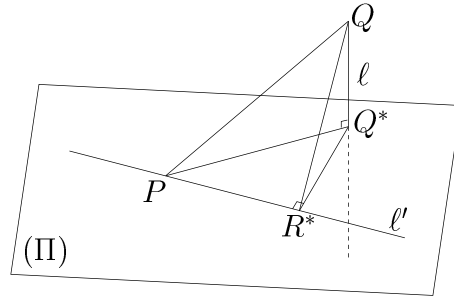
【定理 4.9】：设 $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ 是共交于一点 O 而且两两正交的三条直线。若以简约符号 P_i 表示 $\mathfrak{P}_{\ell_i}(P)$ 则有

$$\overline{PQ}^2 = \overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2$$

[这也就是勾股定理在空间几何中的表达式]

证明：令 Π 是过 P 点和 ℓ_3 正交的平面，ℓ 是过 Q 点和 ℓ_3 平行的直线，ℓ' 是过 P 点而且和 ℓ_1 平行的直线。如 [图 4–19] 所示，令 $Q^* = \ell \cap \Pi$，并作 Q^*R^* 和 ℓ' 正交于 R^* 则有

$$\overline{QQ^*} \perp \overline{PQ^*} \text{（亦有 } \overline{QQ^*} \perp \overline{R^*Q^*}\text{）}$$



[图 4–19]

所以由勾股定理即有

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{PQ^*}^2 + \overline{QQ^*}^2 \\ &= \overline{PR^*}^2 + \overline{R^*Q^*}^2 + \overline{QQ^*}^2\end{aligned}$$

再者，由所作易见

$$\overline{PR^*} = \overline{P_1Q_1}, \quad \overline{R^*Q^*} = \overline{P_2Q_2}, \quad \overline{QQ^*} = \overline{P_3Q_3}$$

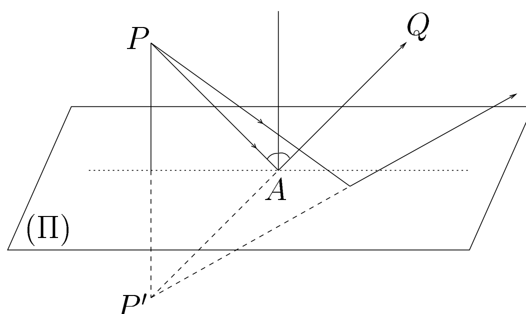
所以即已证得

$$\overline{PQ}^2 = \overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2$$ □

【习题】：

光的反射定律：一个平滑的镜面可以想成是一个平面的局部。远在古希腊时代，即已认识到下述光的反射定律：

> 「入射线、反射线和平面在反射点的法线三线共面，而且两者和法线的夹角相等。」



[图 4–20]

(1) 令 P' 是 P 对于镜面 Π 的反射对称点。试证起始于 P 点的反射线的延长线共交于 P' 点。[这也就是视觉中镜象的几何原由。]

(2) 如 [图 4–20] 所示，起始于 P 点的光线，先走直线到达镜面 Π 上一点 A 然後再反射到 Q 点。试证这种走法是由 P 点经过 Π 上一点然後再到 Q 点的唯一最短通路。（亦即其他经过 Π 上一点由 P 到 Q 的通路都比 $\overline{PA} + \overline{AQ}$ 要长！）

(3) 设 Π_1, Π_2, Π_3 是共交于 O 点而且两两垂直的三个平面。令 $P^\# = \mathfrak{R}_{\Pi_3} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_2} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_1}(P)$。试问 $P, O, P^\#$ 三点的几何关系是什麼？

设 T 是空间的一个保长变换（例如是好些个反射对称的组合），并且用简约符号 $\widehat{P}$ 记号 $T(P)$。

(4) 试证 $X \in \overline{PQ} \Rightarrow \widehat{X} \in \overline{\widehat{P}\widehat{Q}}$。

(5) 设 $\triangle PQR$ 为直角三角形，试证 $\triangle\widehat{P}\widehat{Q}\widehat{R}$ 也是一个直角三角形。

(6) 试证 $\triangle PQR$ 和 $\triangle\widehat{P}\widehat{Q}\widehat{R}$ 必定是全等的。

(7) 设 A, B 是空间任给两点，是否存在一个适当的平移 T 使得 $T(A) = B$？试用反射对称之组合构造之。

(8) 上述平移是否是唯一存在的？试证明你的观点。